

现代数学基础丛书 173

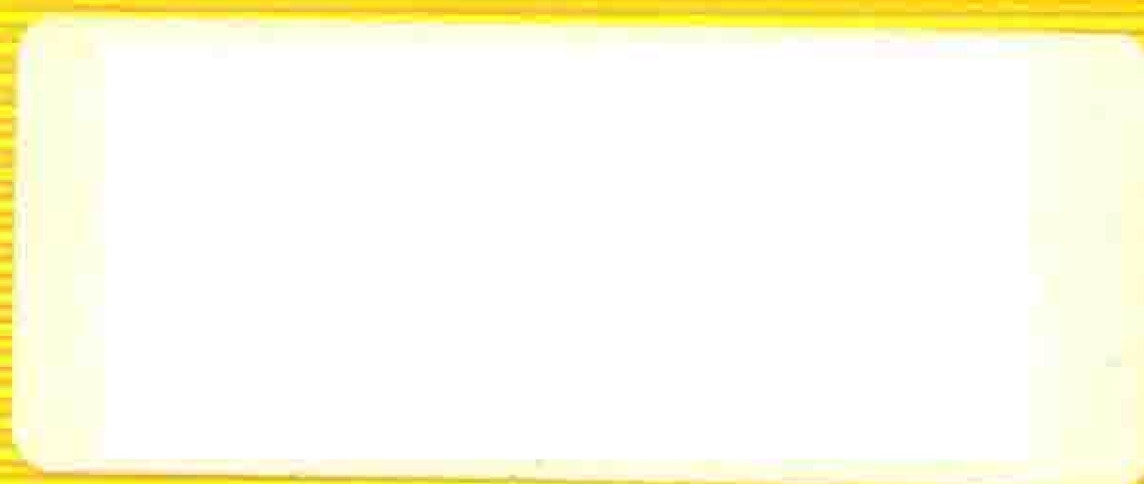
简明李群

孟道骥　史毅茜　著



科学出版社

(O-7043.31)





科学出版社互联网入口
科学数理分社
电 话：(010) 64019814
Email：lijingke@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-054507-7

定 价：98.00 元

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 173

简明李群

孟道骥　史毅茜　著



科学出版社
北京

内 容 简 介

李群是建立在分析、几何、拓扑、代数等基础上的重要数学分支，因而透彻讲述李群理论的书都是大部头的书．由于李群理论在诸多学科如物理、化学等都有重要应用，因而许多学者又都要具备李群理论的一定基础．简明版本的李群适合许多读者．大多数简明版本的李群讲述的多是典型李群，而对例外李群讲得很少，甚至不讲．但随着研究的深入，例外李群的应用愈显重要．

本书共六章，包括：李代数与微分几何、李群、紧李群的结构、紧李群的有限维表示、例外李群的实现和Riemann对称空间．本书力求深入浅出、循序渐进、简洁明了，利于读者掌握李群的要义．

本书可作为高等院校数学、物理等专业本科生、研究生李群课程教材，也可供有关科技人员及大专院校师生自学参考．

图书在版编目(CIP)数据

简明李群/孟道骥，史毅茜著．—北京：科学出版社，2017. 12
(现代数学基础丛书；173)
ISBN 978-7-03-054507-7

Ⅰ. ①简…　Ⅱ. ①孟…　②史…　Ⅲ. ①李群-研究　Ⅳ. ①O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 226431 号

责任编辑：李静科／责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 12 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2017 年 12 月第一次印刷　印张：15 1/2
字数：293 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序

李群、李代数产生于 19 世纪末, 经过几十年的发展, 到 20 世纪六七十年代已发展成为一个重要的数学分支, 其与几何、代数和数学分析这三个基础分支都有紧密的联系. 李群的基础不仅是数学分析, 还有由数学分析发展起来的 (近代的或抽象的) 微分几何. 提到微分几何就不得不想起高斯 (K. F. Gauss, 1777~1855) 和黎曼 (G. F. B. Riemann, 1826~1866). 李群的另一个基础是 "群", 其实抽象代数也是从群发展起来的. "群" 的概念首先是伽罗瓦 (Galois, 1811~1832) 在研究用根式求解代数方程时引进的. 将代数方程的解进行置换所引起的群的结构特点与求解代数方程的问题有着本质的联系, 揭示了群论的深刻意义和重大作用. 但是记载伽罗瓦伟大贡献的部分论文在他逝世 14 年之后的 1846 年才出版. 1870 年, 若尔当 (C. Jordan, 1838~1922) 全面介绍了伽罗瓦的思想, 并在群论方面做了许多研究工作. 他在置换群方面的工作成果收集在 1870 年出版的《置换论》中. 他对传播伽罗瓦的思想, 推动抽象代数的建立有重要贡献. 伽罗瓦的思想影响不仅体现在代数上, 而且还体现在几何上, 突出的代表是克莱因 (C. F. Klein, 1849~1925). 1872 年, 他说: "几何学就是 '给出一个流形和这个流形的一个变换群, 建立关于这个群的不变性理论'(埃尔朗根纲领)." 虽然这个思想是不全面的, 但是在数学发展中仍起了很大作用. 伽罗瓦思想在数学分析上的影响就是李群的产生.

李 (Marius Sophus Lie, 1842~1899), 挪威数学家, 李群、李代数理论的创始人. 1859 年, 李进入克里斯蒂安尼亚 (今奥斯陆) 大学, 并于 1865 年毕业. 1869 年, 李到柏林学习, 与克莱因一起工作并结为好友. 1870 年他和克莱因一起到巴黎, 与法国数学家若尔当等相识, 并受到法国学派的影响. 1871 年, 李回到挪威, 次年获博士学位并在克里斯蒂安尼亚大学任教. 1886 年, 李到莱比锡继任克莱因的职务 (克莱因回到了哥廷根, 成了哥廷根学派的前期领袖). 1889 年, 李患精神分裂症. 1898 年李回到奥斯陆执教, 直至逝世. 李的主要著作《变换群理论》(三卷) 是由他的学生恩格尔协助整理并于 1893 年出版的.

李想把伽罗瓦的思想用来解微分方程, 特别在研究微分方程解的分类时引进了连续变换群的概念, 这个群的每个变换以参数来描述, 两个变换的乘积 "解析地" 依赖于参数, 后来称为**局部李群**. 在连续变换群的单位元附近取导数就得到无穷小变换, 这些无穷小变换构成的代数就是**李代数**. 李还解决了李群与李代数之间的关系, 即李的基本定理. 确切地说, 李最初所研究的是局部李变换群及李代数. 在相当长的一个时期内李的研究仅与一些微分方程或偏微分方程的积分问题有关, 而与

数学的其他分支关系不大.

李的工作在其生前一直未得到足够的重视. 直到 20 世纪初, 他的研究成果由于在物理学和几何学中有了很好的应用才得以发扬. 在这其中有两位人物起了关键作用.

外尔 (H. Weyl, 1885~1955) 研究了群、李群在物理学中的应用, 以及群和李群的表示理论. 随着放射现象的发现, 研究微观物理是 20 世纪物理学的重大转折与发展, 而微观物理的基础是量子力学. 最早的原子模型是所谓壳模型, 电子围绕原子核转动, 因而转动群 ($SO(3,\mathbf{R})$) 的表示就有了用武之地. 外尔在其名著《群论与量子力学》一书中第一次将李群表示论用于量子力学, 主要用转动群的线性表示. 现在理论物理学家广泛地应用李群、李代数理论. 反过来, 他们的工作又促进了群、李群表示理论的建立和发展. $SO(3,\mathbf{R})$ 是紧致的单李群, 其表示既是半单李群、李代数表示的基础, 也是犀利的工具, 有人称之为“解牛尖刀”.

嘉当 (É. Cartan, 1869~1951) 将李群用于几何学, 建立了黎曼对称空间理论.

随着李群在物理学、几何学上应用的巨大成功, 李群、李代数理论也成长起来了. 20 世纪的上半叶, 李群、李代数理论, 发展得最充分的是紧李群及其李代数、复与实半单李群及其李代数. 所谓最充分, 是指这些李群和李代数结构、分类、实现以及它们的有限维表示等都有非常优美的方法和结果. 李群、李代数成为数学中一个重要领域, 对数学、物理的影响与日俱增. 从 20 世纪后半叶开始, 除李群李代数理论本身有很大发展外, 还产生了下面的一些分支.

李群的拓扑　自外尔和嘉当奠基以来, 人们对李群和它的齐性空间的拓扑结构的研究十分活跃, 并产生了各种不同的方法和理论, 如同调代数、韦伊代数以及莫尔斯理论等.

非交换调和分析　外尔和嘉当关于紧李群的表示论的工作指出, 古典傅里叶分析和球调和函数应该与李群论的概念相联系, 由此产生了非交换调和分析.

李群的无限维表示　非交换调和分析与李群的无限维表示密切相关. 李群的无限维表示论可以从分析的观点研究, 也可以从代数的观点研究.

代数群　代数群和谢瓦莱群理论是从半单李群理论启发而发展起来的新分支. 代数群和谢瓦莱群是将代数簇与群结合起来, 因而所考虑的域由实数域和复数域扩展到一般的域. 博雷尔 (Berel, 1871~1956) 用代数几何的工具将紧半单李群的许多性质推广到更一般的情形即线性代数群上.

我国数学家段学复院士与法国著名数学家谢瓦莱 (Chevalley, 1909~1984) 建立了代数群的基本定理.

华东师范大学曹锡华教授生前翻译了许多有关李群、李代数的书, 对李群、李代数在中国的传播有重要作用. “文革”后, 他在华东师范大学主持了代数群的研究, 并培养了许多人才.

李型单群 有限域上的谢瓦莱群是有限单群, 这类群就是李型单群. 20 世纪代数学的一个重要成果 (也可以说是数学的一个重要成果) 是完成了有限单群的分类: 素数阶的循环群; $n \geqslant 5, n \neq 6$ 的交错群 A_n; 李型单群以及 26 个散在单群.

无限维李代数 如 Kac-Moody 代数、Toroid 代数、Witt 代数、Virasoro 代数等无限维李代数的结构、表示理论都与理论物理、组合数学等学科密切相关.

万哲先院士在 20 世纪 80 年代举办的 Kac-Moody 代数讨论班对我国李代数特别是无限维李代数研究的发展及现代化起了重要作用, 培养了如苏育才、赵开明、张贺春等优秀人才.

模李代数 模李代数即特征非零的域上的李代数, 现在只对单李代数有重要的结果.

我国著名数学家沈光宇在极其艰苦的条件下, 坚持研究单模李代数、模李代数的表示等, 均取得国际瞩目的成果.

李超代数 李超代数是与李代数紧密联系的非李代数. 由于物理学中对超对称性研究的活跃, 与之密切相关的李超代数的研究也日趋活跃.

量子群 随着理论物理中规范场论的发展, 出现了 Yang-Baxter 方程. 研究此方程的解时, 如果将一个李代数 "变形" 所得的代数称为量子群, 这是数学和物理学者都很关心的问题, 是一个研究热点.

顶点算子代数 这是一种原本较为复杂的、综合了多种代数的代数体系, 现在日益成熟, 与几何、有限群等都有密切联系. 对此领域的研究充满了机会. 华裔数学家董崇英、黄一知、李海生等都是此领域的优秀人才.

当然还有许多分支, 不是本书作者能完全介绍的. 总而言之, 现在用 "李群李代数理论" 已不能概括这些丰富多彩的内容, 于是 "李理论" 一词应运而生.

20 世纪在西南联合大学举办了我国的第一个李群讨论班, 由陈省身、华罗庚和王竹溪主持, 参加者有王宪钟、严志达等. 王宪钟后到美国任教, 他在两点齐性空间、秩为 1 的 Riemann 对称空间的研究负有盛名.

严志达院士 (1917~1999) 在例外 (特殊) 单李群的 Betti 数方面的工作被誉为 " 李群拓扑的里程碑". 他在研究一般对称空间时, 给出的实半单李代数的分类方法 (严志达图) 也享有盛誉. 他在微分几何、积分几何、齿轮啮合理论等方面都有突出成就. 除西南联合大学外, 他在南开大学开设的李群、李代数课是国内最早、持续时间最长的. 他著有《李群和微分几何》《半单纯李群李代数表示论》《实半单李代数》《李群及其李代数》(与许以超合作).

许以超教授解决了 Cartan 在 Hermite 对称空间中一个未曾解决的问题, 此研究是值得称赞的.

直到 20 世纪 80 年代, 我国在李理论的科研与教学都是薄弱的. 随着我国改革开放方针的实施, 国门打开, 陈省身先生等许多科学家从美国回到阔别多年的祖

国. 陈先生提出了要实现中国数学的 “独立和平等”, 并提出了深思熟虑、切实可行的建议. 其中一个措施就是, 从 1984 年开始举办 “全国数学研究生暑期教学中心”, 就是后来的 “全国数学研究生暑期学校”, 开设的课程针对重要而国内又薄弱的领域. 李群是首届六门课程之一, 由著名教授项武义主讲. 李群被多次列入暑期学校的课程. 经过 20 多年的努力, 我国李群及李理论学科的发展已有长足进步.

随着李群理论与越来越多的领域的联系被发现, 需要了解李群的群体也越来越大, 他们不一定专门研究李群, 但要应用它. 科学出版社希望我们写一本适合这些读者的书, 并鼓动和帮助我们申请科技部学术著作出版基金. 我们就以《简明李群》这本小书作为对国家科学技术学术著作出版基金委员会和科学出版社, 特别是李静科编辑的鼓励和帮助的感谢! 感谢南开大学、中国科学技术大学、南京大学、四川大学、北京大学、东北师范大学等院校和全国数学研究生暑期学校给予我们讲学的机会和帮助. 我们还要感谢南开大学数学科学学院的宋琼、邓旭等老师的支持与帮助.

本书内容包括: 李代数与微分几何、李群、紧李群的结构、紧李群的有限维表示、例外李群的实现、Riemann 对称空间. 第 1 章是为了本书尽量能自圆其说而添加的李代数和微分几何的基本知识. 第 2 章到第 4 章则是李群理论最基础的内容. 第 4 章的重要性还在于这是将李群理论用于物理学的发源地, 是促进李群理论得以发展的关键之一. 第 5 章例外李群是许多书都避而不谈的内容, 其原因是较为困难. 但随着发现例外李群的应用越来越多、越来越重要, 不能总规避. 第 6 章则是李群在几何上的应用, 也就是 Riemann 对称空间的理论, 这是促进李群理论发展的另一关键.

由于作者水平所限, 难免有不当之处, 衷心希望读者批评指正.

作　者

2015 年 12 月, 2017 年 5 月修改

目　　录

《现代数学基础丛书》序

序

第 1 章　李代数与微分几何 ······ 1

1.1　李代数的定义 ······ 1

1.2　线性李代数与表示 ······ 4

1.3　可解李代数与幂零李代数 ······ 6

1.4　半单李代数 ······ 9

1.5　微分流形 ······ 12

第 2 章　李群 ······ 19

2.1　李群与局部李群 ······ 19

2.2　李群的几何性质 ······ 22

2.3　单参数子群与指数映射 ······ 28

2.4　李群的子群 ······ 34

2.5　同态与表示 ······ 39

2.6　李群的覆盖群 ······ 45

2.7　李群的自同构群 ······ 48

2.8　齐性空间 ······ 51

2.9　商群 ······ 56

2.10　旋量群 ······ 59

第 3 章　紧李群的结构 ······ 64

3.1　紧李群的不变内积 ······ 64

3.2　紧半单李代数决定的李群 ······ 70

3.3　实李代数的复化 ······ 74

3.4　紧李代数的极大交换子代数 ······ 77

3.5　素根系 ······ 84

3.6　实紧李群的 Cartan 子群的共轭性 ······ 92

3.7　Weyl 群 ······ 100

3.8　紧李代数的分类 ······ 104

3.9　$SO(n)$, $Sp(n)$ 的李代数 ······ 107

第 4 章 紧李群的有限维表示 …… 114
4.1 紧李代数的复表示 …… 114
4.2 对偶表示 …… 120
4.3 紧李群复表示的表示函数与特征 …… 122
4.4 $L_0^2(G_0)$ 的积分运算 …… 125
4.5 特征公式 …… 127
4.6 实紧李群的实表示论 …… 133
第 5 章 例外李群的实现 …… 140
5.1 旋表示 …… 140
5.2 G_2 的实现 …… 146
5.3 李代数 F_4 与 E_8 …… 148
第 6 章 Riemann 对称空间 …… 156
6.1 定义 …… 156
6.2 Riemann 对称空间的等距变换群 …… 158
6.3 Riemann 对称对 …… 166
6.4 例 …… 171
6.5 实半单 Lie 代数 …… 177
6.6 正交对称 Lie 代数 …… 186
6.7 对偶性 …… 193
6.8 对称空间的截曲率 …… 198
6.9 Riemann 对称空间的分解 …… 201
6.10 对称空间的秩 …… 206
6.11 Hermite 对称空间 …… 213
参考文献 …… 222
索引 …… 223
《现代数学基础丛书》已出版书目 …… 228

第 1 章　李代数与微分几何

本章主要介绍与李群理论联系最紧密的李代数和微分几何的一些基本事实. 在李代数 (例如, 文献 [4], [10])、微分几何 (例如, 文献 [1],[19]) 的教材中是很容易找到的, 因此我们略去许多证明.

我们约定以下符号:

$\mathbf{F}$ 表示一个域, 在本书中假定其特征不为 2; $\mathbf{R}$ 表示实数域; $\mathbf{C}$ 表示复数域; $\mathbf{F}^{m\times n}$ 表示元素在 $\mathbf{F}$ 中的 m 行、n 列的矩阵的集合; I_n 表示 n 阶单位矩阵; $I_{p,q}$ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

对于 $A\in\mathbf{F}^{m\times n}$, A' 表示 A 的转置; $\mathrm{row}_i A$ 表示 A 的第 i 行, $\mathrm{col}_j A$ 表示 A 的第 j 列; $\mathrm{ent}_{ij}A$ 表示 A 的第 i 行、第 j 列处的元素; 对于 $A\in\mathbf{F}^{n\times n}$, $\mathrm{tr}A$ 表示方阵 A 的迹; $\det A$ 表示方阵 A 的行列式.

1.1　李代数的定义

定义 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 上线性空间 $\mathfrak{g}$ 有二元运算 $(x,\ y)\to[x,\ y]$ (通常称为**换位运算**或**括积**), 满足:

1)　此二元运算是双线性的;

2)　此二元运算是反对称的: $[x,\ x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{g}$;

3)　**Jacobi 恒等式**成立, 即 $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$,

则称 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbf{F}$ 上的**李代数 (Lie 代数)**.

如果域 $\mathbf{F}$ 的特征不为 2, 则条件 2) 等价于 $[x,\ y]=-[y,\ x],\ \forall x\in\mathfrak{g}$.

例 1.1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 在其中定义: $[x,y]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 称为**交换李代数**或 **Abel 李代数**.

例 1.1.2　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 V 的所有线性变换构成的线性空间 (结合代数), 在其中定义: $[x,y]=xy-yx,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 称为**一般线性李代数**, 记为 $gl(V)$.

作为有限维线性空间的线性变换, 可以用矩阵形式表示. 于是上面的例子也可以表现为下面的形式.

例 1.1.3　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶方阵构成的线性空间 (结合代数), 在其中定义: $[A,B]=AB-BA,\ \forall A,B\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 也称为**一般线性李代数**, 记

为 $gl(n,\mathbf{F})$.

例 1.1.4　设 $\mathcal{F}$ 是实数域上某个区间上的任意次连续可微的一元函数的集合. 在 $\mathfrak{g}=\left\{f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\middle|f(x)\in\mathcal{F}\right\}$ 中定义加法与数的乘法及括积为 $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+g(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=(f(x)+g(x))\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; $a\left(f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=af(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, a 为常数; $\left[f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},g(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]=(f(x)g'(x)-f'(x)g(x))\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是一个无限维李代数.

定义 1.1.2　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是域 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, $[x_i, x_j]=\sum\limits_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}x_k$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 称数组 $\{C_{ij}^k|1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 对于基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**结构常数**.

例 1.1.5　若 $\mathfrak{g}$ 是 n 维交换李代数, 则对任何基, 结构常数均为 0.

例 1.1.6　$gl(n,\mathbf{F})$ 的元素 E_{ij} 满足 $\mathrm{ent}_{kl}E_{ij}=\delta_{ki}\delta_{lj}$, $1\leqslant k,l\leqslant n$, 则 $\{E_{ij}|1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的基. 此时 $[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{kj}, 1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$. 于是, 对于此基的结构常数为 $C_{(ij)\ (kl)}^{(st)}=\delta_{jk}\delta_{si}\delta_{tl}-\delta_{il}\delta_{sk}\delta_{tj}, 1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$.

命题 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 中数组 $\{C_{ij}^k|1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$ 能成为 $\mathbf{F}$ 上 n 维李代数的结构常数当且仅当下列条件成立:

1) $C_{ii}^k=0$, $1\leqslant i,k\leqslant n$;

2) $C_{ij}^k=-C_{ji}^k$, $1\leqslant i,j,k\leqslant n$;

3) $\sum\limits_{l=1}^{n}(C_{ij}^lC_{lk}^m+C_{ki}^lC_{lj}^m+C_{jk}^lC_{li}^m)=0$, $1\leqslant i,j,k,m\leqslant n$.

$\mathbf{F}$ 的特征不为 2 时, 条件 1) 可去掉. 建议读者将这个命题的证明当作一个练习.

设 $\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的非空子集, 分别以 $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]$ 表示由 $\{m_1+m_2|m_i\in\mathfrak{m}_i\}$, $\{[m_1,m_2]|m_i\in\mathfrak{m}_i\}$ 生成的子空间.

定义 1.1.3　李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 满足 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$, 则称为 $\mathfrak{g}$ 的**子代数**. 若满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$, 则称为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**.

显然, 理想一定是子代数.

例 1.1.7　若 $\mathfrak{g}$ 是 n 维交换李代数, 则任何子空间都是理想.

例 1.1.8　$gl(n,\mathbf{F})$ 中所有上三角矩阵构成的子空间记为 $\mathfrak{t}(n,\mathbf{F})$, 所有上三角的且对角元素都是 0 的矩阵构成的子空间记为 $\mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$, 所有反对称矩阵构成的子空间记为 $so(n,\mathbf{F})$, 所有迹为 0 的矩阵构成的子空间记为 $sl(n,\mathbf{F})$. 则这些子空间都是子代数, 而且 $sl(n,\mathbf{F})$ 是理想.

定理 1.1.1　设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=\{\bar{x}=x+\mathfrak{h}|x\in\mathfrak{g}\}$ 中定义括积为 $[\bar{x},\bar{y}]=\overline{[x,y]}$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 也是李代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**.

证 首先, 证明商空间中括积的定义的合理性. 设 $\overline{x_1}=\bar{x}, \overline{y_1}=\bar{y}$, 即 $x-x_1=u, y-y_1=v\in\mathfrak{h}$. 于是 $[x,y]-[x_1,y_1]=[x_1+u,y_1+v]-[x_1,y_1]=[x_1,v]+[u,y_1]+[u,v]\in\mathfrak{h}$. 故 $\overline{[x_1,\ y_1]}=\overline{[x,\ y]}$.

其次, 证明所定义的括积满足所要求的条件. $[\bar{x},\bar{x}]=\overline{[x,\ x]}=\bar{0}$; $[\overline{x_1+x_2},\bar{y}]=\overline{[x_1+x_2,y]}=\overline{[x_1,y]+[x_2,y]}=[\overline{x_1},\bar{y}]+[\overline{x_2},\bar{y}]$; $[\overline{ax},\bar{y}]=\overline{[ax,y]}=a[\bar{x},\bar{y}]$; Jacobi 恒等式: $[\bar{x},[\bar{y},\bar{z}]]+[\bar{y},[\bar{z},\bar{x}]]+[\bar{z},[\bar{x},\bar{y}]]=\overline{[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]}=\bar{0}$. 所以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是李代数. □

定义 1.1.4 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的线性映射 (线性同构) φ 若满足 $\varphi([x,\ y])=[\varphi(x),\ \varphi(y)]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}_1$, 则称 φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同态** (**同构**).

$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构, 记为 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$.

设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的自然映射 π 也是李代数的同态.

定理 1.1.2 李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到李代数 $\mathfrak{g}_2$ 上的同态 φ 的核 $\ker\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想, 且 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi\cong\mathfrak{g}_2$.

证 从线性代数理论知 $\ker\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的子空间, 又设 π 是从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi$ 自然 (线性) 同态, 则由 $\bar{\varphi}\pi=\varphi$ 确定的 $\bar{\varphi}$ 是 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的线性同构.

注意 $\bar{\varphi}([\pi(x),\pi(y)])=\bar{\varphi}\pi([x,y])=\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]=[\bar{\varphi}(\pi(x)),\bar{\varphi}(\pi(y))]$. 所以 $\bar{\varphi}$ 是李代数的同构. □

例 1.1.9 设域 $\mathbf{F}$ 的特征为 0. 则作为线性空间有直和分解: $gl(n,\mathbf{F})=sl(n,\mathbf{F})\dot{+}\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$. 易知 $sl(n,\mathbf{F})$, $\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$ 都是理想, 而且 $gl(n,\mathbf{F})/sl(n,\mathbf{F})\cong\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$, $gl(n,\mathbf{F})/\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}\cong sl(n,\mathbf{F})$.

例 1.1.10 设域 $\mathbf{F}$ 的特征为 0. 令 $\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}A & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\, A\in gl(n-1,\mathbf{F}),\ \alpha\in\mathbf{F}^{(n-1)\times 1}\right\}$. 再令 $\mathfrak{s}=\left\{\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\, A\in gl(n-1,\mathbf{F}),\ \mathrm{tr}A=0\right\}$, $\mathfrak{n}=\left\{\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\, \alpha\in\mathbf{F}^{(n-1)\times 1}\right\}$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}+\left\{\begin{pmatrix}aI_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\, a\in\mathbf{F})\right\}$. 由于 $\left[\begin{pmatrix}A & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}[A,B] & A(\beta)-B(\alpha)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 所以 $\mathfrak{g}$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的子代数, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}\cong gl(n-1,\mathbf{F})$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}\cong sl(n-1,\mathbf{F})$.

习 题

1. 设 $\mathbf{R}^3$ 是 3 维实向量空间. 证明其对向量积

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\quad \vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbf{R}^3,$$

构成李代数, 并与 $so(3,\mathbf{R})$ 同构.

2. 证明命题 1.1.1.

3. 李代数的两个子代数的交、和是否仍是子代数?

4. 李代数的两个理想的交、和是否仍是理想?

5. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $\mathfrak{g}$ 的包含 $\mathfrak{h}$ 的子代数与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的子代数之间有一一对应关系, 而且此对应将理想对应到理想.

6. 设 $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ 都是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{k}$. 证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 同构于 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$.

7. 设 $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ 都是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

1.2　线性李代数与表示

定义 1.2.1　$gl(n,\mathbf{F})(gl(V))$ *及其子代数均称为***线性李代数**.

除 $gl(n,\mathbf{F})$ 外, 重要的线性李代数有:

1) **特殊线性李代数**　$sl(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(n,\ \mathbf{F})|\mathrm{tr}\,X=0\}$.

2) **正交李代数**　$so(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(n,\ \mathbf{F})|X'+X=0\}$.

3) **辛李代数**　$sp(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(2n,\ \mathbf{F})|X'J+JX=0\}$, 其中 $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$.

4) **Lorentz 李代数**　$o(p,\ q,\ \mathbf{R})=\{X\in gl(p+q,\ \mathbf{R})|X'I_{p,q}+I_{p,q}X=0\}$, 这里 $p,\ q$ 为非负整数, $I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p,\ I_q)$.

当 $p=0,\ q=n$ 或 $p=n,\ q=0$ 时, $o(p,\ q,\ \mathbf{R})$ 为实正交李代数.

5) **酉李代数**　$u(n)=\{X\in gl(n,\ \mathbf{C})|\bar{X}'+X=0\}$. 它是 $gl(n,\ \mathbf{C})$ 的 n^2 维实子代数.

6) **特殊酉李代数**　$su(n)=u(n)\cap sl(n,\ \mathbf{C})$.

7) **$(p,\ q)$ 型酉李代数**　$u(p,\ q)=\{X\in gl(p+q,\ \mathbf{C})|\bar{X}'I_{p,q}+I_{p,q}X=0\}$.

8) **特殊 $(p,\ q)$ 型酉李代数**　$su(p,\ q)=u(p,\ q)\cap sl(p+q,\ \mathbf{C})$.

9) **$(p,\ q)$ 型辛李代数**　$sp(p,\ q)=\{X\in gl(2(p+q),\ \mathbf{C})|X'J+JX=0,\bar{X}'K_{p,q}+K_{p,q}X=0\}$, 其中 $K_{p,q}=\mathrm{diag}(I_{p,q},\ I_{p,q})$.

当 $p=0,\ q=n$ 或 $p=n,\ q=0$ 时, 为 $sp(n)=sp(n,\ \mathbf{C})\cap u(2n)$.

10) **特殊正交星李代数**　$so^*(2n)=\{X\in gl(2n,\ \mathbf{C})|\bar{X}'J+JX=0,\ X'+X=0\}$ 是 $2n^2-n$ 维实李代数.

11) **酉星李代数**　$u^*(2n)=\{X\in GL(2n,\ \mathbf{C})|\bar{X}J=JX\}$.

12) **特殊酉星李代数**　$su^*(2n)=u^*(2n)\cap sl(2n,\ \mathbf{C})$.

定义 1.2.2 设 $\mathfrak{g}, V$ 分别是域上的李代数、线性空间, 若 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $gl(V)$ 中的一个同态, 则称 ρ (或 (ρ, V)) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个以 V 为表示空间的**线性表示**, 简称**表示**, $\dim V$ 称为**表示的维数**, $\ker\rho$ 称为**表示的核**.

定理 1.2.1 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{F}$ 域上的李代数, 则对任一 $x \in \mathfrak{g}$, 可以定义 $gl(\mathfrak{g})$ 中的一个元素 $\mathrm{ad}x$ 为 $\mathrm{ad}x(y) = [x, y], \forall y \in \mathfrak{g}$, 则 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

证 很明显, $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\,x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性变换. 又 $x \to \mathrm{ad}\,x$ 是线性空间 $\mathfrak{g}$ 到线性空间 $gl(\mathfrak{g})$ 的线性映射. 又 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathrm{ad}([x, y])z = [[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\mathrm{ad}x)z$, 即 $\mathrm{ad}([x, y]) = [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. 所以 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示. □

定义 1.2.3 李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示的核, 称为此李代数的**中心**, 记为 $C(\mathfrak{g})$.

从上面的定义可知: $C(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

定理 1.2.2 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{F}$ 域上的有限维李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 上的二元函数 $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y)$, $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$, 是 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数, 满足 $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, 称 $B(x, y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 型**.

证 由线性变换迹的运算容易验证 $B(x, y)$ 是对称双线性的. 又

$$
\begin{aligned}
B([x, y], z) &= \mathrm{tr}((\mathrm{ad}([x, y])\mathrm{ad}z)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\mathrm{ad}x)\mathrm{ad}z) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y\mathrm{ad}z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}x\mathrm{ad}z) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}z\mathrm{ad}x) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}x\mathrm{ad}z) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}([z, x]) = -B(y, [x, z]),
\end{aligned}
$$

知定理成立. □

例 1.2.1 设 $X, Y \in gl(n, \mathbf{F})$, 于是有 $(\mathrm{ad}X)^2Y = X^2Y - 2XYX + YX^2$. 因为 $gl(n, \mathbf{F})$ 有基 $\{E_{ij} | 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, $X \in gl(n, \mathbf{F})$, 有 $X = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\mathrm{ent}_{ij}X)E_{ij}$, 因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij}) &= \mathrm{ent}_{ij}(X^2E_{ij} - 2XE_{ij}X + E_{ij}X^2) \\
&= \mathrm{ent}_{ii}X^2 - 2(\mathrm{ent}_{ii}X)(\mathrm{ent}_{jj}X) + \mathrm{ent}_{jj}X^2.
\end{aligned}
$$

因而 $B(X, X) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij}) = 2n\mathrm{tr}X^2 - 2(\mathrm{tr}X)^2$. 于是

$$
\begin{aligned}
B(X, Y) &= \frac{1}{2}(B(X + Y, X + Y) - B(X, X) - B(Y, Y)) \\
&= n\mathrm{tr}(X + Y)^2 - (\mathrm{tr}(X + Y))^2 - n\mathrm{tr}X^2 + (\mathrm{tr}X)^2 - n\mathrm{tr}Y^2 + (\mathrm{tr}Y)^2 \\
&= 2n\mathrm{tr}(XY) - 2(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}Y).
\end{aligned}
$$

由此可见, $B(I_n, X) = 0$, $\forall X \in gl(n, \mathbf{F})$.

注意, $sl(n,\mathbf{F})$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的理想, 于是 $\mathrm{trad}X = \mathrm{trad}X|_{sl(n,\mathbf{F})}$, $\forall X \in sl(n,\mathbf{F})$. 由此可见, $sl(n,\mathbf{F})$ 的 Killing 型是 $B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY)$, $\forall X, Y \in sl(n,\mathbf{F})$. 如果 $\mathbf{F} = \mathbf{C}\,(\mathbf{R})$, 则由 $X \in sl(n,\mathbf{F})$ 知 $\overline{X'} \in sl(n,\mathbf{F})$, 且 $X \neq 0$ 时, 有 $B(X, \overline{X'}) = 2n\mathrm{tr}(X\overline{X'}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\mathrm{ent}_{ij}X)(\overline{\mathrm{ent}_{ij}X}) > 0$. 因此, $B(X, Y)$ 是非退化的.

例 1.2.2 因为 $\mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$ 有基 $\{E_{ij}|1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, 而

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}E_{ij}\mathrm{ad}E_{kl})E_{st}\\ =&\delta_{ls}\delta_{jk}E_{it} - \delta_{ls}\delta_{ti}E_{kj} - \delta_{kt}\delta_{js}E_{il} - \delta_{kt}\delta_{it}E_{sj}, \quad i < j,\ k < l,\ s < t.\end{aligned}$$

由此可知, $\mathrm{ent}_{st}((\mathrm{ad}E_{ij}\mathrm{ad}E_{kl})E_{st}) = 0$, $\forall 1 \leqslant s < t \leqslant n$. 因此 $B(E_{ij}, E_{kl}) = 0$, 进而 $B(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$.

习 题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 证明 $\mathfrak{h}$ 的中心 $C(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.
2. 设 $B(x, y)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 证明:

   1) $\ker B = \{x \in \mathfrak{g}|B(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\ker B \supseteq C(\mathfrak{g})$;

   2) 若 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $B(x, y)$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上的限制是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Killing 型;

   3) 若 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g}|B(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_1\}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想;

   4) 若 $B(x, y)$ 非退化, 又 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, $\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g}|B(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_1\}$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$. 以后两个理想的直和, 常以 “$\oplus$” 代替 “$\dotplus$”.
3. 证明: $so(n, \mathbf{C})$ 的 Killing 型 $B(X, Y) = (n-2)\mathrm{tr}(XY)$.
4. 证明: $sp(n, \mathbf{C})$ 的 Killing 型 $B(X, Y) = 2(n+1)\mathrm{tr}(XY)$.

1.3 可解李代数与幂零李代数

定理 1.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 中序列 $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \cdots$ 与 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \cdots$ 的每一项都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 它们分别称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数序列**、**降中心序列**.

证 以导代数序列为例. 对 k 作归纳证明, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ 自然是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $\mathfrak{g}^{(k)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 于是 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]] = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k)}], \mathfrak{g}^{(k)}] \subseteq [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] = \mathfrak{g}^{(k+1)}$. 因而定理成立. □

定义 1.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数. 若有 k 使得 $\mathfrak{g}^k = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为**幂零李代数**; 若有 k 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为**可解李代数**.

例 1.3.1 显然, 交换李代数是幂零李代数. 由于 $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$, 所以幂零李代数是可解李代数.

例 1.3.2 域 $\mathbf{F}$ 上所有 k 阶上三角方阵集 $\mathfrak{t}(k, \mathbf{F})$ 构成可解李代数.

例 1.3.3 域 $\mathbf{F}$ 上所有 k 阶对角元素为 0 的上三角方阵 (严格上三角矩阵) 集 $\mathfrak{n}(k, \mathbf{F})$ 构成幂零李代数.

例 1.3.4 可解李代数的子代数, 商代数是可解的.

例 1.3.5 幂零李代数的子代数, 商代数是幂零的.

例 1.3.6 设 $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbf{C}) \cap \mathfrak{t}(2, \mathbf{C})$, 则 $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{n}(2, \mathbf{C}) \neq \{0\}$, 而 $\mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}$. $k \geqslant 1$ 时, $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^1 \neq \{0\}$. 因此 $\mathfrak{g}$ 是可解的, 但不是幂零的.

定理 1.3.2(Engel) 设 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, $\mathfrak{g}$ 是 $gl(V)$ 的子代数, 其中任何元素均是 V 的幂零线性变换, 则 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数.

证 若能证明: 在 V 中有基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得 $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{g}$ 在此基下的矩阵均为严格上三角矩阵, 则 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{n}(n, \mathbf{C})$ 的子代数, 因而是幂零的.

为此对 V 的维数作归纳证明.

$\dim V = 1$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{A}$ 幂零, 故 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 为 0. 因此结论成立.

对 $\dim V > 1$, 再对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳证明: 存在 $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$, 使得 $\mathcal{A}v_1 = 0$, $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{g}$.

当 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 自然成立. 当 $\dim \mathfrak{g} > 1$ 时, $\mathfrak{g}$ 有非零真子代数 $\mathfrak{h}$. 于是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} = \{\mathrm{ad}\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathfrak{h}\} \subseteq gl(\mathfrak{g})$, 且有不变子空间 $\mathfrak{h}$. 以 $\sigma(\mathcal{A})$ 表示 $\mathrm{ad}\mathcal{A}$ 在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上诱导的线性变换, 令 $\sigma(\mathfrak{h}) = \{\sigma(\mathcal{A}) | \mathcal{A} \in \mathfrak{h}\}$. 容易证明这是一个李代数, 而且 σ 是 $\mathfrak{h}$ 到 $\sigma(\mathfrak{h})$ 的满同态. 由 $\mathcal{A}$ 幂零知 $\mathrm{ad}\mathcal{A}$ 幂零, 从而 $\sigma(\mathcal{A})$ 幂零.

以 $\sigma(\mathfrak{h})$ 取代 $\mathfrak{g}$, 以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 取代 V. 因而从 $\dim \sigma(\mathfrak{h}) \leqslant \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$, 于是由归纳假设知, 有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中的非零元素 $\mathcal{B} + \mathfrak{h}$, 使得 $\sigma(\mathcal{A})(\mathcal{B} + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{h}$. 即有 $\mathcal{B} \notin \mathfrak{h}$, 而 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathfrak{h}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{h}$. 因而 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathcal{B}$ 生成一个子代数, 其维数是 $\dim \mathfrak{h} + 1$. 由此可以断定, 若 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数, 则其余维数为 1, 并为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

以下假定 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数. 于是 V 的子空间 $W = \{v \in V | \mathcal{A}v = 0, \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}$. 设 $v \in W$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{h}$, $\mathcal{B} \notin \mathfrak{h}$. 由 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \in \mathfrak{h}$, 于是有 $\mathcal{A}\mathcal{B}v = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]v + \mathcal{B}\mathcal{A}v = 0$. 因而 W 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间, $\mathcal{B}$ 是幂零的, 于是有 $v_1 \in W \subseteq V$, $v_1 \neq 0$, 使得 $\mathcal{B}v_1 = 0$. 因此

$$\mathcal{A}v_1 = 0, \quad \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{g}.$$

对于 $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}$, 设 $\overline{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 在 $V/L(v_1)$ 上的诱导, 于是 $\overline{\mathfrak{g}} = \{\overline{\mathcal{A}} | \mathcal{A} \in \mathfrak{g}\}$ 是 $gl(V/L(v_1))$ 的子代数, 其中每个元素都是幂零的, 于是可归纳地假设有 $V/L(v_1)$ 的基 $\overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ 使得 $\overline{\mathcal{A}}$ 的矩阵是严格上三角的. 于是 V 有基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得 $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{g}$ 在此基下的矩阵均为严格上三角矩阵. 因此定理成立. □

定理 1.3.3(Lie)　设 (ρ, V) 是复数域 $\mathbf{C}$ 上有限维可解李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. 则在 V 中有基, 使得任何 $x \in \mathfrak{g}$, $\rho(x)$ 在此基下的矩阵为上三角矩阵.

证　仍然对 $\dim \mathfrak{g}$, $\dim V$ 作双重归纳证明. 如果 $\dim V = 1$ 或 $\dim \mathfrak{g} = 1$, Lie 定理自然成立.

一般地, 首先证明有 $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$, 使得 $\rho(x)v_1 = \lambda(x)v_1$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

设 $\dim g > 1$. 由 $\mathfrak{g}$ 可解, 于是 $\mathfrak{g}$ 中有余维数为 1 的子空间 $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} L(a), \quad a \in \mathfrak{g},\ a \notin \mathfrak{h}.$$

将 ρ 限制在 $\mathfrak{h}$ 上得到 $\mathfrak{h}$ 的表示 $(\rho_{\mathfrak{h}}, V)$, 由 $\mathfrak{h}$ 可解, 于是归纳假设有 $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$, 使得 $\rho(x)v_1 = \lambda(x)v_1$, $\forall x \in \mathfrak{h}$. 因而有 V 的子空间

$$W = \{v \in V | \rho(x)v = \lambda(x)v,\ x \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}.$$

设 $v \in W$, 令 W_{k_0} 是 v 生成的 $\rho(a)$ 的循环子空间, 于是 W_{k_0} 有基: v, $\rho(a)v$, $\cdots$, $\rho(a)^{k_0-1}v$. 显然 $\rho(a)W_{k_0} \subseteq W_{k_0}$. 现证明 $\forall x \in \mathfrak{h}$, 有

$$\rho(x)\rho(a)^i v \equiv \lambda(x)\rho(a)^i v \,(\mathrm{mod} W_i), \quad W_i = L(v, \rho(a)v, \cdots, \rho(a)^{i-1}v).$$

若 $i = 0$, 注意 $\rho(x)v = \lambda(x)v$, 于是结论成立. 再注意 $[x, a] \in \mathfrak{h}$, 于是由归纳假设有

$$\rho(x)\rho(a)^{i+1}v = \rho(a)\rho(x)\rho(a)^i v + \rho([x,a])\rho(a)^i v \equiv \lambda(x)\rho(a)^{i+1}v \,(\mathrm{mod} W_{i+1}).$$

于是 $\rho(x)W_{k_0} \subseteq W_{k_0}$, 因此 W_{k_0} 是 $\rho(x)\,(x \in \mathfrak{g})$ 的不变子空间, 而且

$$\mathrm{tr}\rho(x)|_{W_{k_0}} = k_0\lambda(x), \quad k_0\lambda([x,a]) = \mathrm{tr}([\rho(x), \rho(a)]|_{W_{k_0}} = 0.$$

于是

$$\rho(x)\rho(a)v = [\rho(x), \rho(a)]v + \rho(a)\rho(x)v = \lambda(x)\rho(a)v, \quad \forall x \in \mathfrak{h}.$$

所以 $\rho(a)v \in W$, 即 W 是 $\rho(a)$ 的不变子空间, 于是有 $v_1 \in W$, $v_1 \neq 0$, 使得 $\rho(a)v_1 = \lambda(a)v_1$. 因此

$$\rho(x)v_1 = \lambda(x)v_1, \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

$\rho(x)$ 在 $V/L(v_1)$ 上诱导出 $\bar{\rho}(x)$, 由此得到 $\mathfrak{g}$ 的表示 $(\bar{\rho}, V/L(v_1))$, 于是对 $\dim V$ 的归纳立即可证 Lie 定理成立. □

定义 1.3.2　若李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 满足 $[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ 当且仅当 $x \in \mathfrak{h}$, 则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 子代数**, 且称 $\dim \mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**秩**, 记为 $\mathrm{rank}\mathfrak{g}$ 或 $\mathrm{r}\mathfrak{g}$.

例 1.3.7 在 $sl(n,\mathbf{C})$ 中, 令 $\mathfrak{h}=\left\{A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0\right\}$, 于是 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=\{0\}$, 即 $\mathfrak{h}$ 是幂零的. 又若 $B=(b_{ij})\in sl(n,\mathbf{C})$, 则有 $[A,B]=((a_i-a_j)b_{ij})\in\mathfrak{h}$, $\forall A\in\mathfrak{h}$, 当且仅当 $i\neq j$ 时, $b_{ij}=0$, 即 $B\in\mathfrak{h}$. 因而 $\mathfrak{h}$ 为 Cartan 子代数. 且 $sl(n,\mathbf{C})$ 的秩为 $n-1$.

习 题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是 n 李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 交换, 当且仅当 $\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}$.
2. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $\mathfrak{g}$ 可解, 当且仅当 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 都可解.
3. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 都幂零. $\mathfrak{g}$ 是否幂零?
4. 证明李代数 $\mathfrak{g}$ 幂零, 当且仅当 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 幂零.
5. 证明李代数 $\mathfrak{g}$ 幂零, 当且仅当 $\mathrm{ad}x\,(\forall x\in\mathfrak{g})$ 幂零.
6. 证明李代数 $\mathfrak{g}$ 可解, 当且仅当 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 幂零.
7. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 交换, 当且仅当 $\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}$.
8. 证明李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解理想的和是可解的, 幂零理想的和是幂零的.

1.4 半单李代数

定义 1.4.1 如果李代数中不含非零的交换理想, 则称为**半单李代数**; 若半单李代数还不含非平凡理想, 则称为**单李代数**.

定理 1.4.1 1) 非交换李代数 $\mathfrak{g}$ 关于下列条件等价:

i) $\mathfrak{g}$ 是半单的;

ii) $\mathfrak{g}$ 不含非零的幂零理想;

iii) $\mathfrak{g}$ 不含非零的可解理想;

2) 若 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化, 则 $\mathfrak{g}$ 是半单的.

证 1) 由 i) 到 ii), ii) 到 iii), iii) 再到 i), 可完成 1) 的证明.

i)$\Longrightarrow$ ii) 若 $\mathfrak{g}$ 包含非零的幂零理想 $\mathfrak{n}$. 则有 $\mathfrak{n}^k\neq\{0\}$, 而 $\mathfrak{n}^{k+1}=\{0\}$. 于是 $\mathfrak{n}^k\subseteq C(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{n}^k$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想, 矛盾.

ii)$\Longrightarrow$ iii) 若 $\mathfrak{g}$ 包含非零的可解理想 $\mathfrak{r}$. 如 $\mathfrak{r}$ 非交换则 $\mathfrak{r}^{(1)}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的非零幂零理想, 矛盾.

iii)$\Longrightarrow$ i) 由于交换李代数是可解李代数, 于是无非零可解理想自然无非零的交换理想.

2) 若不然, 则 $\mathfrak{g}$ 中有交换理想 $\mathfrak{a}\neq\{0\}$. 在 $\mathfrak{a}$ 中取基 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, 再扩充为 $\mathfrak{g}$ 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_r$, x_{r+1}, $\cdots$, x_n. 若 $x\in\mathfrak{a}$,$y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathrm{ad}x$, $\mathrm{ad}y$ 在此基下

的矩阵分别为 $X=\begin{pmatrix}0 & X_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2\\ 0 & Y_4\end{pmatrix}$, 其中 $X_2, Y_2 \in \mathbf{F}^{r\times(n-r)}$. 于是 $B(x,y)=\mathrm{tr}(XY)=0$, 这与 Killing 型非退化矛盾. 故 $\mathfrak{g}$ 半单. □

定理 1.4.2　若 $\mathfrak{g}$ 的基域的特征为 0, 则 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当 Killing 型非退化.

这个定理的证明我们略去, 可参见文献 [2], [10], [20] 及 [21] 等.

定理 1.4.3　Killing 型非退化的半单李代数可分解为单理想的直接和, 除这些单理想的次序外, 这种分解是唯一的.

证　若 $\mathfrak{g}$ 是单李代数, 结论自然成立. 否则, 设 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非平凡理想. 令

$$\mathfrak{g}_1^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}|B(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{g}_1\}.$$

于是由 $\forall x\in\mathfrak{g}_1^{\perp}$, $y\in\mathfrak{g}_1$, $z\in\mathfrak{g}$, 有 $B([x,z],y)=B(x,[z,y])=0$, 于是 $\mathfrak{g}_1^{\perp}$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $x,y\in\mathfrak{a}$, $z\in\mathfrak{g}$, 则有 $B([x,y],z)=-B(y,[x,z])=0$. 注意 Killing 型的非退化性, 于是 $\mathfrak{a}$ 是交换的, 又由 $\mathfrak{g}$ 的半单性知 $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_1^{\perp}=\{0\}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的基. $y\in\mathfrak{g}$, $y\notin\mathfrak{g}_1$. 于是 $m+1$ 个未知数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, λ_{m+1} 的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m}B(x_j,x_i)\lambda_j+B(y,x_i)\lambda_{m+1}=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

有非零解, 仍记为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, λ_{m+1}. 于是

$$z=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j+\lambda_{m+1}y\in\mathfrak{g}_1^{\perp}.$$

若 $\lambda_{m+1}=0$, 则 $z\in\mathfrak{a}=\{0\}$, 故 $\lambda_i=0, 1\leqslant i\leqslant m+1$, 这就产生矛盾. 由此可知,$\lambda_{m+1}\neq 0$. 于是

$$y=\frac{1}{\lambda_{m+1}}z-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j\in\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_1^{\perp}.$$

因此 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1^{\perp}$. 注意 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 的限制就是它们的 Killing 型. 于是有限步后知 $\mathfrak{g}$ 的单理想的直和分解: $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r$.

设 $\mathfrak{b}$ 是非零的极小理想, 若 $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{g}_i$, $i=1,2,\cdots,r$, 则 $[\mathfrak{b},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_i=\{0\}$, $i=1,2,\cdots,r$. 因此 $[\mathfrak{b},\mathfrak{g}]=\{0\}$. 这是不可能的. 因此有 i, 使得 $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}_i$. 由此知分解的唯一性. □

从此定理知, 特征 0 域上有限维半单李代数的问题归结为单李代数的问题.

下面是一个单李代数的典型例子.

例 1.4.1 以前已经给出 $sl(n,\mathbf{C})$ 的 Killing 型 $B(X,Y)=2n\mathrm{tr}(XY)$ 是非退化的, 因此 $sl(n,\mathbf{C})$ 是半单的.

还知道 $\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_1+a_2+\cdots+a_n=0\}$ 是 $sl(n,\mathbf{C})$ 的 Cartan 子代数. $sl(n,\mathbf{C})$ 有子空间的直和分解:

$$sl(n,\mathbf{C})=\mathfrak{h}+\sum_{i\neq j}\mathbf{C}E_{ij}.$$

设 $\lambda_i\in\mathfrak{h}^*$, 定义: $\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n))=a_i$, $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathfrak{h}$, $1\leqslant i\leqslant n$. 再定义 $\Delta=\{\lambda_i-\lambda_j|i\neq j\}$, $\quad\Pi=\{\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}|1\leqslant i\leqslant n-1\}$. 容易得到下面一些结果:

1) $B(X,Y)$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制仍是非退化的. 对于 $\lambda_i-\lambda_j\in\Delta$, 有

$$B((2n)^{-1}(E_{ii}-E_{jj}),A)=(\lambda_i-\lambda_j)(A),\quad\forall A\in\mathfrak{h}.$$

于是可将 $\lambda_i-\lambda_j$ 等同于 $(2n)^{-1}(E_{ii}-E_{jj})$ 视为 $\mathfrak{h}$ 中元素.

2) 令 $\Delta_+=\{\lambda_i-\lambda_j|i<j\}$, $\Delta_-=\{\lambda_i-\lambda_j|i>j\}$. 则

$$\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-,\quad\Delta_-=-\Delta_+,\quad\Delta_+\cap\Delta_-=\varnothing,\quad\Pi\subseteq\Delta_+.$$

3) $\lambda_i-\lambda_j\in\Delta_+$, 则 $\lambda_i-\lambda_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{j-1}$.

4) $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}\}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基.

5) 令 $\mathbf{C}E_{ij}=\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}$, 则 $\dim\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}=1$.

6) $\lambda_i-\lambda_j,\lambda_k-\lambda_l\in\Delta$, 此时

$$[E_{ij},E_{kl}]=\begin{cases}E_{il}, & j=k,i\neq l,\\ -E_{kj}, & l=i,k\neq j,\\ E_{ii}-E_{jj}, & k=j,i=l,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

或等价地写为 $\alpha,\beta\in\Delta$ 时,

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\begin{cases}\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta\in\Delta,\\ \mathbf{C}\alpha, & \alpha+\beta=0,\\ \{0\}, & \alpha+\beta\neq0,\ \alpha+\beta\notin\Delta.\end{cases}$$

7) Δ 生成的实线性空间

$$\mathfrak{h}_R=\{\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathfrak{h}|a_i\in\mathbf{R}\}$$

满足:$\dim \mathfrak{h}_R = \dim \mathfrak{h}$; $B(X,Y)$ 在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制 (X,Y) 是正定的, 因此 $\mathfrak{h}_R$ 是 Euclid 空间.

8) $\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_k - \lambda_l \in \Delta$, 有

$$\begin{aligned}&(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_k - \lambda_l) = (2n)^{-2}(E_{ii} - E_{jj}, E_{kk} - E_{ll})\\ =& (2n)^{-1}\mathrm{tr}((E_{ii} - E_{jj})(E_{kk} - E_{ll})) = (2n)^{-1}(\delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{il} - \delta_{jk}).\end{aligned}$$

特别, $\lambda_i - \lambda_j \neq \pm(\lambda_k - \lambda_l)$ 时, 有 $(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j) = (\lambda_k - \lambda_l, \lambda_k - \lambda_l) = n^{-1}$; $(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_k - \lambda_l) = 0$ 或 $\pm (2n)^{-1}$;

$$\frac{(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_k - \lambda_l)^2}{(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_l, \lambda_k - \lambda_l)} = 0 \text{ 或 } \frac{1}{4}.$$

此例许多结论对一般的复半单李代数也是对的.

习 题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 是 2 维复李代数, 求其 Killing 型, 并证明 $\mathfrak{g}$ 不是单李代数.
2. 证明 $sl(n, \mathbf{C})$ 是单李代数.

1.5 微分流形

定义 1.5.1 设 M 是一个 Hausdorff 空间, 并有 M 的开集族 $\mathfrak{W}$ 满足:

1) $\bigcup\limits_{U \in \mathfrak{W}} U = M$;

2) 对任一 $U \in \mathfrak{W}$, 有 U 到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集的同胚映射 φ_U;

3) 若 $U, V \in \mathfrak{W}$, 且 $U \cap V \neq \varnothing$, 则 $\varphi_V \varphi_U^{-1}$ 是 $\varphi_U(U \cap V)$ 到 $\varphi_V(U \cap V)$ 的 C^∞ (解析) 映射;

则称 M 为 n 维 C^∞ **(解析) 流形**, 也简称 M 是 n 维微分流形.

称 (U, φ_U) 为一个坐标卡或一个局部坐标邻域. 若 $x \in U$, 则 $\varphi_U(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 称为 x 的坐标.

若 $U, V \in \mathfrak{W}$, $x \in U \cap V$, 则 $\varphi_U(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\psi_V(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 因此 $y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 C^∞ (解析) 函数当然 x_i 也是 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的 C^∞ (解析) 函数.

例 1.5.1 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 分别为 n, $2n$ 维流形.

例 1.5.2 $\mathbf{R}^n$ 中球面 $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ 为 $n-1$ 维流形.

例 1.5.3 $GL(n,\mathbf{R})=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}|\det A\neq 0\}$ 为 n^2 维流形.

这是因为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 与 $\mathbf{R}^{n^2}$ 是相同的, 而 $\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}|\det A=0\}$ 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的闭子集, 故 $GL(n,\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的开子集.

例 1.5.4 $GL(n,\mathbf{C})=\{A\in\mathbf{C}^{n\times n}|\det A\neq 0\}$ 为 $2n^2$ 维流形.

这是因为 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 与 $\mathbf{C}^{n^2}$ 是相同的, 而 $\{A\in\mathbf{C}^{n\times n}|\det A=0\}$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 的闭子集, 故 $GL(n,\mathbf{C})$ 为 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 的开子集.

设 M 是一个 n 维微分流形 (C^∞ 流形). 以 $\mathcal{F}(M)$ 表示 M 上可微函数的集合.

设 $f\in\mathcal{F}(M)$, $x\in U$, $U\in\mathfrak{W}$, 于是 $f(x)=f(\varphi_U^{-1}\varphi_U(x))\in\mathbf{R}$, 即有

$$f(x)=f\varphi_U^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\varphi_U(U)$$

是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 C^∞ (解析) 函数.

又若 $x\in V$, $V\in\mathfrak{W}$, 于是 $f(x)=f(\varphi_V^{-1}\varphi_V(x))\in\mathbf{R}$, 即有

$$f(x)=f\varphi_V^{-1}(y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad (y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\varphi_V(V)$$

是 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的 C^∞ (解析) 函数.

因此, $f(x)$ 的光滑性与包含 x 的坐标邻域的选取无关.

取定 U 后, 常将 $f(x)=f\varphi_U^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 简记为 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

命题 1.5.1 $\mathcal{F}(M)$ 对于函数的加法、乘法及函数与常数的乘法为实数域上的交换结合代数.

建议读者将这个命题的证明当作一个练习.

定义 1.5.2 $\mathcal{F}(M)$ 的一个变换 X, 若满足条件: $X(\alpha f+\beta g)=\alpha X(f)+\beta X(g)$, $X(fg)=f\cdot X(g)+g\cdot X(f)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; $f,g\in\mathcal{F}(M)$ 则称 X 是 M 的**一个可微向量场**.

也就是说 X 是结合代数 $\mathcal{F}(M)$ 的导子.

在流形 M 中取好坐标系之后, $\mathcal{D}^1(M)$ 中元素可以用坐标的解析式来表达.

设 $f\in\mathcal{F}(M)$, $x\in U$, $U\in\mathfrak{W}$, $\varphi_U(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, x_i 可以扩充为 $\mathcal{F}(M)$ 中元素, 此时 $X_i=Xx_i\in\mathcal{F}(M)$. $x_0=(x_{0\,1},x_{0\,2},\cdots,x_{0\,n})$, 于是有

$$\begin{aligned}(Xf)(x_0)&=\lim_{x\to x_0}X\left(f(x_0)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i-x_{0\,i})+o(|x-x_0|)\right)\\&=\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).\end{aligned}$$

这说明在坐标邻域内有 $X=\sum\limits_{i=1}^n X_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $X_i=Xx_i$, $1\leqslant i\leqslant n$.

定理 1.5.1　以 $\mathcal{D}^1(M)$ 表示 M 的所有可微向量场的集合. 在 $\mathcal{D}^1(M)$ 中可定义加法, 也可定义 $\mathcal{D}^1(M)$ 与实数的乘积, 及与 $\mathcal{F}(M)$ 中元素的乘积. $\mathcal{D}^1(M)$ 中定义括积如下:

$$\begin{cases} (X+Y)f = X(f)+Y(f), & X,Y\in\mathcal{D}^1(M),\ f\in\mathcal{F}(M), \\ (\alpha X)(f) = \alpha X(f), & \alpha\in\mathbf{R},\ X\in\mathcal{D}^1(M),\ f\in\mathcal{F}(M), \\ (gX)(f) = g(X(f)), & X\in\mathcal{D}^1(M),\ f,g\in\mathcal{F}(M), \\ [X,Y] = XY-YX, & X,Y\in\mathcal{D}^1(M). \end{cases}$$

则 $\mathcal{D}^1(M)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数, 也是 $\mathcal{F}(M)$ 的左模.

建议读者将这个定理的证明当作一个练习.

例 1.5.5　设 S^1 是一个圆周, 当然这是一个光滑的 1 维流形. $\mathcal{F}(S^1)$, $\mathcal{D}(S^1)$ 分别为 S^1 上的光滑函数的集合, 向量场的集合. 于是 $\mathcal{F}(S^1)$ 是一个交换结合代数, 而且其中元素是以 2π 为周期的周期函数, 即 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$.

$\mathcal{F}(S^1)$ 有基: $1,\ \cos(n\theta),\ \sin(n\theta), n=1,2,\cdots$. 为避免收敛性的问题, 将其作为线性空间的基. 于是 $f(\theta)$ 是三角函数 $\cos\theta, \sin\theta$ 的多项式.

取复数域 $\mathbf{C}$ 与 $\mathcal{F}(S^1)$ 的张量积, $\mathbf{C}\otimes\mathcal{F}(S^1)$, 即将 $\mathcal{F}(S^1)$ 的基域由实数域扩大为复数域. 于是

$$\exp(\sqrt{-1}n\theta) = \cos(n\theta)+\sqrt{-1}\sin(n\theta) = z^n, \quad z=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta, \quad n\in\mathbf{Z}$$

为交换结合代数 $\mathbf{C}\otimes\mathcal{F}(S^1)$ 的基, 且 $\mathbf{C}\otimes\mathcal{F}(S^1)$ 与 $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ 是同构的交换结合代数.

$\mathcal{D}(S^1)$ 是交换结合代数 $\mathcal{F}(S^1)$ 的导子代数, 其中括积为

$$\left[f(\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\ g(\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right] = (f(\theta)g'(\theta)-g(\theta)f'(\theta))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}.$$

$\mathcal{D}(S^1)$ 有基: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\ \cos(n\theta)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\ \sin(n\theta)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta},\ n=1,2,\cdots$. 为避免收敛性的问题, 将其作为线性空间的基. 于是 $\mathcal{D}(S^1)$ 的括积中的 $f(\theta), g(\theta)$ 是三角函数的多项式.

取复数域 $\mathbf{C}$ 与 $\mathcal{D}(S^1)$ 的张量积, $\mathbf{C}\otimes\mathcal{D}(S^1)$, 即将 $\mathcal{D}(S^1)$ 的基域由实数域扩大为复数域. 令 $\exp(\sqrt{-1}n\theta) = \cos(n\theta)+\sqrt{-1}\sin(n\theta) = z^n,\ n\in\mathbf{Z}$. 于是有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = \sqrt{-1}\,z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$. 令 $d_n = \sqrt{-1}\exp(\sqrt{-1}\,n\theta)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = -z^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, n\in\mathbf{Z}$, 则有

$$[d_n, d_m] = (n-m)d_{n+m}, \quad n,m\in\mathbf{Z}.$$

于是 $\mathbf{C}\otimes\mathcal{D}(S^1)$ 同构于 $\mathrm{Der}\mathbf{C}[t,t^{-1}]$, $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ 是 Laurent 多项式代数.

回到一般的流形 M. 对于一般的 $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$, 有

$$[fX, gY] = f(X(g))Y - g(Y(f))X + fg[X, Y].$$

因而 $\mathcal{D}^1(M)$ 不是 $\mathcal{F}(M)$ 上的 Lie 环. 既然 $\mathcal{D}^1(M)$ 是左 $\mathcal{F}(M)$ 模. 我们就可考虑它的对偶模 $\mathcal{D}_1(M)$.

也就是说, $\omega \in \mathcal{D}_1(M)$, ω 是 $\mathcal{D}^1(M)$ 到 $\mathcal{F}(M)$ 的映射, 满足:

$$\omega(X+Y) = \omega(X) + \omega(Y), \quad \omega(fX) = f\omega(X), \quad X, Y \in \mathcal{D}^1(M), \quad f \in \mathcal{F}(M).$$

$\omega(X)$ 也常记为 $\langle X, \omega \rangle$.

定义 1.5.3 $\mathcal{D}_1(M)$ 中的元素称为**一次微分形式**或**余切向量场**.

定理 1.5.2 设 M 为微分流形. 定义 $\mathcal{F}(M)$ 到 $\mathcal{D}_1(M)$ 的映射 d 如下: $df(X) = X(f), \forall f \in \mathcal{F}(M)$, $X \in \mathcal{D}^1(M)$. 则 d 满足 $d(f+g) = df + dg, d(fg) = fdg + gdf, \forall f, g \in \mathcal{F}(M)$.

建议读者将这个定理的证明当作一个练习.

从几何的观点来看, 如果以 M_p 表示 M 在 p 点的切空间, 那么 $\mathcal{D}^1(M)$ 中元素 X 在 p 点的值 X_p 就是 M 在 p 点的一个切向量, 即 $X_p \in M_p$.

M_p 的基为 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. 注意到 $dx_i\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. 于是在 M_p 的对偶空间 M_p^* 中相应的对偶基为 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$.

在流形 M 中取好坐标系之后, 我们知道 $\mathcal{D}^1(M)$ 中元素可以用坐标的解析式来表达, 于是 $\mathcal{D}_1(M)$ 中元素也可以用坐标的解析式来表达:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\mathrm{d}x_i, \quad g_i(x) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i, \quad f(x) \in \mathcal{F}(M).$$

从 $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{D}^1(M)$ 与 $\mathcal{D}_1(M)$ 出发可以构造 M 上的混合张量代数, 记为 $\mathcal{D}(M)$. 令 $\mathcal{D}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$, $\mathcal{D}_p^q(M) = \underbrace{\mathcal{D}_1(M) \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_1(M)}_{p} \otimes \underbrace{\mathcal{D}^1(M) \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}^1(M)}_{q}$. 则 $\mathcal{D}(M) = \sum\limits_{p,q} \mathcal{D}_p^q(M)$. $X \in \mathcal{D}_p^q(M)$, 称 X 为 (p, q) 型**张量**.

定义 1.5.4 微分流形 M 的一个**仿射联络** ∇ 是 $\mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M)$ 到 $\mathcal{D}^1(M)$ 的一个映射: $\nabla(X, Y) = \nabla_X(Y)$, 满足下面三个条件:

1) ∇ 是双线性的;

2) $\forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$, $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y), f \in \mathcal{F}(M)$;

3) $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$, $\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f\nabla_X(Y)$.

对一个固定的 $X \in \mathcal{D}^1(M)$, 则 ∇_X 是 $\mathcal{D}^1(M)$ 到 $\mathcal{D}^1(M)$ 的线性映射. 但 ∇_X 不是左 $\mathcal{F}(M)$ 模 $\mathcal{D}^1(M)$ 的模同态.

我们称 $\nabla_X Y$ 为 Y 在 X 方向的**协变微分**.

在流形 M 中取好坐标系之后, 仿射联络在局部可以表示为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

$\{\Gamma_{ij}^k\}$ 称为**联络系数**.

∇_X 扩充为混合张量代数 $\mathcal{D}(M)$ 的算子满足下面三个性质:

1) ∇_X 是 $\mathcal{D}(M)$ 的导子;

2) ∇_X 保持张量的类型;

3) ∇_X 与 $\mathcal{D}(M)$ 中的任何缩并运算可换.

∇_X 也叫做混合张量代数 $\mathcal{D}(M)$ 的协变微分.

容易得到下面一些常用的关系式:

$$\forall f \in \mathcal{F}(M),\ X, Y \in \mathcal{D}^1(M),\ \omega \in \mathcal{D}_1(M),$$

$$\nabla_X(f) = X(f), \quad (\nabla_X \omega)(Y) = X \cdot \omega(Y) - \omega(\nabla_X(Y)).$$

有了仿射联络之后, 就有了**挠率张量** T 与**曲率张量** R:

$$\begin{aligned} &T(\omega, X, Y) = \omega(\mathrm{Tor}(X, Y)), && \mathrm{Tor}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]; \\ &R(\omega, X, Y, Z) = \omega(R(X, Y)Z), && R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \end{aligned}$$

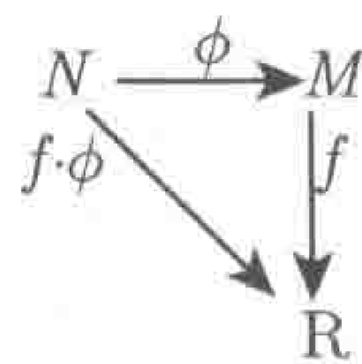
下面讨论两个流形之间的可微映射的一些性质.

定义 1.5.5　设 N, M 均为可微流形, N 到 M 的连续映射 ϕ, 称为是 C^∞ 的, 如果对 $p \in N$, 有 p 的坐标邻域 (U, φ_U) 及 $\phi(p)$ 的坐标邻域 (V, ψ_V), 使得 $\psi_V \phi \varphi_U^{-1}: \varphi_U(U) \to \psi_V(V)$ 在 $\varphi_U(p)$ 是 C^∞ 的, 则称 ϕ 在 p 点是 C^∞ 的, 如果对任意的 p 都是 C^∞ 的, 则称 ϕ 是**可微的或光滑的** (C^∞ 的). 若 ϕ 是可逆的, 且 ϕ^{-1} 也是光滑的, 则称其为**微分同胚**.

由 ϕ 可以导出许多相关的映射.

$\mathcal{F}(M)$ 到 $\mathcal{F}(N)$ 的映射 ϕ^* 定义为 $\phi^* f = f \cdot \phi$, 由此可得

$$\begin{aligned} \phi^*(f + f_1)(p) &= (f + f_1)(\phi(p)) = f(\phi(p)) + f_1(\phi(p)) \\ &= (\phi^* f + \phi^* f_1)(p); \\ \phi^*(f f_1)(p) &= (f f_1)(\phi(p)) = f(\phi(p)) f_1(\phi(p)) \\ &= (\phi^* f)(\phi^* f_1)(p). \end{aligned}$$



于是 ϕ^* 是交换结合代数的同态. 若 ϕ 是微分同胚, 则 ϕ^* 是结合代数的同构.

$\mathcal{D}^1(N)$ 到 $\mathcal{D}^1(M)$ 的映射 $d\phi$ 由下面关系确定. 对 $X \in \mathcal{D}^1(N)$, 有

$$X \cdot \phi^* = \phi^* \cdot (d\phi(X)),$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathcal{F}(N) \\ {\scriptstyle d\phi(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

即对任何 $f \in \mathcal{F}(M)$, $X \in \mathcal{D}^1(N)$ 有 $X(\phi^* f) = \phi^*(d\phi(X)f)$. 特别地, 有

$$\begin{aligned} &\phi^*(d\phi([X,Y])f) = [X,Y](\phi^* f) = X(Y(\phi^* f)) - Y(X(\phi^* f)) \\ =& X(\phi^*(d\phi(Y)f)) - Y(\phi^*(d\phi(X)f)) \\ =& \phi^*(d\phi(X)d\phi(Y)f) - \phi^*(d\phi(Y)d\phi(X)f) \\ =& \phi^*([d\phi(X), d\phi(Y)]f). \end{aligned}$$

因此 $d\phi([X,Y]) = [d\phi(X), d\phi(Y)], \quad X, Y \in \mathcal{D}^1(N)$. 即 $d\phi$ 是 Lie 代数 $\mathcal{D}^1(N)$ 到 Lie 代数 $\mathcal{D}^1(M)$ 的同态映射.

自然, 由 ϕ 还可以导出 ϕ 在微分形式 $\mathcal{D}_1(M)$ 与 $\mathcal{D}_1(N)$ 之间的诱导映射 ϕ^*:

$$\phi^*\omega(X)(x) = \omega(d\phi(X))(\phi(x)), \quad \omega \in \mathcal{D}_1(M),\ X \in \mathcal{D}^1(N), x \in N.$$

如果 ϕ 是微分同胚, 则 $\forall g \in \mathcal{F}(N), X \in \mathcal{D}^1(N)$ 有 $d\phi(gX) = ((\phi^{-1})^* g) d\phi(X)$.

定义 1.5.6 **R 到** M **的可微映射** $\gamma(t)$ **称为** M **的一条曲线**.

注意到 $\mathcal{D}^1(\mathbf{R})$ 是由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 生成的循环左 $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ 模. 令 $d\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \dot{\gamma}(t)$. 在一个坐标邻域中,

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

定义 1.5.7 M **中曲线** $\gamma(t)$ **若满足** $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$, **则称为测地线**.

在一个坐标邻域中, 测地线 $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 由一个二阶微分方程组给出.

事实上, 由

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) =& \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ =& \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \\ =& \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \\ =& 0, \end{aligned}$$

可得 $\gamma(t)$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^{k}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

定义 1.5.8 设 M 是微分流形, ∇ 是 M 的仿射联络, ϕ 是 M 到自身的微分同胚, 且满足

$$d\phi(\nabla_X Y)=\nabla_{d\phi(X)}(d\phi(Y)),\quad \forall X,Y\in\mathcal{D}^1(M),$$

则称 ϕ 为 M 的**仿射变换**.

习　　题

1. 设 M,N 分别为 m,n 维 C^∞ 流形, 分别有坐标邻域集 $\mathfrak{W}=\{(W,\varphi_W)|W\in\mathfrak{W}\}$, $\mathfrak{U}=\{(U,\psi_U)|U\in\mathfrak{U}\}$. 证明:

   1) 拓扑空间 $M\times N=\{(p,q)|p\in M.q\in N\}$ 有开覆盖 $\mathfrak{W}\times\mathfrak{U}=\{(W,U)|W\in\mathfrak{W},U\in\mathfrak{U}\}$;

   2) (W,U) 到 $\mathbf{R}^{m+n}=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ 中的映射

$$(\varphi_W\times\psi_U)(p,q)=(\varphi_W(p),\psi_U(q)),\quad (p,q)\in(W,U)$$

是到 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中一个开集的同胚;

   3) $M\times N$ 是一个 C^∞ 流形. (称 $M\times N$ 为 M 与 N 的积流形.)

2. 设 $M\times N$ 为 M 与 N 的积流形. 证明 $(M\times N)_{(p,q)}$ 为 M_p 与 N_q 的直和.

第2章 李 群

本章是本书的核心部分, 主要说明群、微分几何与李代数之间的关系. 既然李群与微分几何密切相关, 也就与微分方程, 拓扑学密切相关. 但是我们不在这些方面展开说明.

2.1 李群与局部李群

定义 2.1.1 **李群**是具有下列性质的集合 G:

1) G 是一个群;

2) G 是一个解析流形;

3) G 的逆运算: G 到 G 的映射 $x \to x^{-1}$ 解析;

4) 乘积流形 $G \times G$ 到 G 中映射 $(x,\ y) \to xy$ 解析.

由定义立即可知 $\forall g \in G$, 左平移 L_g 与右平移 R_g 均是解析同胚映射. 因而李群 G 在各点维数相同. 这个维数就叫 G 的**维数**, 记为 $\dim G$.

在定义 2.1.1 中, 若 G 是实解析流形, 则称 G 为**实李群**; 若 G 是复解析流形, 则称 G 为**复李群**.

我们知道任一 m 维的复解析流形, 有自然方式看成 $2m$ 维的实解析流形. 因而复李群 G, 也是 $2\dim G$ 维的实解析流形. $(x,\ y) \to xy$ 是复解析流形 $G \times G$ 到 G 上的解析映射, 自然也是实解析流形 $G \times G$ 到 G 上的解析映射. 故此时, G 也是 $2\dim G$ 维的实李群.

设 e 是李群 G 的单位元素, U 是 e 的一个坐标邻域, $(U,\ \varphi)$ 是标架. 由于 $ee = e$, 于是有 e 的邻域 W, 使得 $WW \subseteq U$, 自然 $W \subseteq U$. 因此 $\forall x,\ y \in W$, 有 $xy \in U$, 且 $\varphi(xy)$ 是 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 的解析函数. 设 $\varphi(x) = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x$, $\varphi(y) = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) = y$, $\varphi(xy) = (f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n) = f(x,\ y)$, 则有

$$f_i(x,\ y) = f_i(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ \cdots,\ y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{1}$$

为 $\varphi(W) \times \varphi(W)$ 上的 $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n$ 与 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 的解析函数.

称 $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), \cdots, f_n(x,y))$ 为**乘法函数**, 称 $l_j^i(x) = \left.\dfrac{\partial f_i(x,\ y)}{\partial y_j}\right|_{y=e}$ 称为**辅助函数**.

例 2.1.1 $\mathbf{R}^n$ (或 $\mathbf{C}^n$) 对于加法运算就是 n 维实 (或复) 李群.

显然 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$ 解析, $(x_1+y_1, x_2+y_n, \cdots, x_n+y_n)$ 对 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 解析.

乘法函数为 $f_i(x,\ y) = x_i + y_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 辅助函数为 $l^i_j(x) = \delta^i_j, 1 \leqslant i,\ j \leqslant n$.

例 2.1.2　$GL(n,\ \mathbf{R})$ 为所有 n 阶可逆方阵的集合, 对矩阵乘法 $GL(n,\ \mathbf{R})$ 是群. 又 $GL(n,\ \mathbf{R})$ 是 n^2 维解析流形 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中开子集, 故是 n^2 维解析流形.

设 $x = (x_{ij})$, $y = (y_{ij})$, X_{ij} 是 x 的元素 x_{ij} 的代数余子式, 则 $\mathrm{ent}_{ij}x^{-1} = \dfrac{1}{\det x}X_{ji}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ 是 $\{x_{kl} | 1 \leqslant k,l \leqslant n\}$ 的有理分式, 因而是解析的. 又 $\mathrm{ent}_{ij}(xy) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ 是 $\{x_{kl}, y_{st} | 1 \leqslant k,l,s,t \leqslant n\}$ 的多项式, 因而也是解析的. 故 $GL(n,\ \mathbf{R})$ 是 n^2 维实李群.

乘法函数为 $f_{ij}(x,\ y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}, 1 \leqslant i,j \leqslant n$. 辅助函数为 $l^{ij}_{st}(x) = \left.\dfrac{\partial f_{ij}(x,\ y)}{\partial y_{st}}\right|_{y=I_n} = x_{is}\delta_{jt}, 1 \leqslant i,j,s,t \leqslant n.$

同样所有 n 阶复可逆方阵的集合 $GL(n,\ \mathbf{C})$ 是 n^2 维的复李群, 因而也是 $2n^2$ 维的实李群.

例 2.1.3　设 $G = S^1$ 是单位圆, $x, y \in S^1$, 可以表示为模为 1 的复数: $x = e^{\sqrt{-1}a}$, $y = e^{\sqrt{-1}b}$, G 对乘法: $xy = e^{\sqrt{-1}(a+b)}$ 是群, 且 $x^{-1} = e^{-\sqrt{-1}a}$. 易知, G 是一个李群.

乘法函数为 $f(x,\ y) = xy$, 辅助函数为 $l(x) = \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Big|_{y=1} = x.$ □

例 2.1.4　设 G 是一个群, 赋予 G 离散拓扑, 于是对任一 $x \in G$, x 的邻域为 $\{x\}$, 同胚于 0 维线性空间 $\mathbf{R}^0 = \{0\}$. 因而 G 可看成 0 维李群.

定理 2.1.1　设非空集合 G 满足:

1)　G 是一个群;

2)　G 是一个解析流形;

3)　乘积流形 $G \times G$ 到 G 中映射 $(x,\ y) \to xy$ 解析.

则 G 是李群.

证　只要证明 G 到 G 的映射 $x \to x^{-1}$ 解析. 设 U 是单位元素 e 的坐标邻域, $(U,\ \varphi)$ 是标架. 由于 φ 解析同胚, 因而不妨将 U 与 $\varphi(U)$ 等同, x 与 $\varphi(x)$ 等同. 设 $f(x,\ y)$, $l^i_j(x)$ 分别为乘法函数、辅助函数, 于是

$$l^i_j(e) = \left.\frac{\partial f_i(e,\ y)}{\partial y_j}\right|_{y=e} = \left.\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right|_{y=e} = \delta_{ij}.$$

因此 $L(e) = (l^i_j(e)) = I_n$ (I_n 是 n 阶单位方阵). 因而由方程组 $f(x,\ y) = e$ 确定的

隐函数 $y_j = y_j(x)$ 在 e 的一个邻域内解析. 但由 $xy = e$, 得 $x^{-1} = y$. 因此 $x \to x^{-1}$ 在 e 的一个邻域内解析.

又对任何 $a \in G$. 令 $x = au$, 则由 $x^{-1} = R_{a^{-1}}u^{-1}$, 知 $x \to x^{-1}$ 在 a 处解析. □

以后验证李群时, 只要验证乘法的解析性即可.

李群的发展最初只是考虑"局部"的性质, 即所谓"局部李群". 下面我们只是简单介绍一下:

定义 2.1.2 集合 V 若满足下面六个条件, 就称为**局部群**.

1) V 是 Hausdorff 空间.

2) 对 V 中某些元素对 x, y, 二元运算 xy 有定义, $xy \in V$. 对某些元素 x 一元运算 x^{-1} 有定义, $x^{-1} \in V$.

3) 映射 $(x, y) \to xy$, $x \to x^{-1}$ 都是连续的. 即若 $x, y \in V$, xy 有定义, 则对 xy 的任一邻域 W, 有 x, y 的邻域 W', W'', 使得 $\forall w' \in W'$, $w'' \in W''$, $w'w''$ 有定义, 且 $w'w'' \in W$. 即 $W'W'' \subset W$. $x \in V$, x^{-1} 有定义, 则对 x^{-1} 的任一邻域 U, 有 x 的邻域 U', 使得 $\forall v' \in U'$, v'^{-1} 有定义, 且 $v'^{-1} \in U'$. 即 $U'^{-1} \subset U$.

4) 若 $x, y, z \in V$, 且 xy, yz, $(xy)z$, $x(yz)$ 均有定义, 则有 $(xy)z = x(yz)$.

5) 存在 $e \in V$, 使得 $e^{-1} = e$; $\forall x \in V$, 有 $xe = x$.

6) 若 x^{-1} 有定义, 则 xx^{-1} 也有定义, 且 $xx^{-1} = e$.

e 称为 V 的**单位**.

设 U 为局部群, 而且 U 在 φ 下同胚于 Euclid 空间中的一个连通开集. 若 $a, b \in U$, $ab^{-1} \in U$, 则 $\varphi(ab^{-1})$ 是 $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ 的解析函数, 则称 U 为**局部李群**.

以后经常用 a 表示 $\varphi(a)$. 因而上述条件可改为 $(a, b) \to ab^{-1}$ 是解析映射.

任何李群 G 的单位坐标邻域显然构成局部李群.

在局部李群的定义中, 可把 $(a, b) \to ab^{-1}$ 解析, 换成 $(a, b) \to ab$, $a \to a^{-1}$ 解析.

李群与拓扑群的关系也是极其密切的.

定义 2.1.3 **拓扑群**是具有下述性质的集合 G:

1) G 是一个群;

2) G 是 Hausdorff 空间;

3) $G \times G$ 到 G 的映射 $(x, y) \to xy^{-1}$ 连续.

定理 2.1.2 设 G 是连通拓扑群, e 的一个开邻域 U 关于 G 的乘法为局部李群. 则在 G 中可引进唯一的解析结构使 G 成为李群, 其诱导拓扑与原来的拓扑一致.

设 G 是一个群, G 中一个包含 e 的子集 V, 又是 G 的生成组, 又是局部李群. 则有唯一的方式将 G 定义成李群, 且在 V 的某个单位开邻域上解析结构是一致的, 且 G 连通.

连通李群 G 的拓扑适合第二可数公理, 即在 G 中有可数基. 李群 G 若有可数基当且仅当 G 的连通分支至多可数个.

我们省略此定理的证明.

习 题

1. $\mathbf{R}$ 为实数域, $\forall x,\ y \in \mathbf{R}$, 定义 $x \circ y$ 为

$$x \circ y = (x^3 + y^3)^{1/3}.$$

则 $\circ$ 将 $\mathbf{R}$ 变成拓扑群 (按通常拓扑), 但对 $\circ$, $\mathbf{R}$ 不是李群.

2. 三维 Euclid 空间中的转动构成李群.

3. 三维 Euclid 空间中的等距变换构成李群.

4. 证明平面转动群是李群, 且同构于 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

5. 设 G_1, G_2 是李群, 于是 $G_1 \times G_2$ 是微分流形, 又是群 G_1, G_2 的直积. 证明 $G_1 \times G_2$ 对此微分结构与群结构为李群. (也称这个李群为 G_1 与 G_2 的直积, 记为 $G_1 \otimes G_2$)

6. 写出 $GL(n, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{R}^n$ 的群运算.

7. 在微分流形 $GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ 中定义二元运算:

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (AB, A\beta + \alpha), \quad (A, \alpha), (B, \beta) \in GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n.$$

证明:

1) $GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ 对此运算为李群;

2) 作为群 $(GL(n, \mathbf{R}), 0)$ 是子群, 而不是正规子群;

3) 作为群 $(I_n, \mathbf{R}^n)$ 是正规子群.

(将这个李群记为 $GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$.)

2.2 李群的几何性质

设 G 是一个李群. 于是对任一 $g \in G$, 确定了 G 的两个自同胚: 左、右平移 L_g, R_g:

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg, \quad \forall h \in G.$$

G 作为微分流形, 当然其最基本的几何性质, 也就是它的向量场、一次微分形式和仿射联络的性质. 另一方面作为群, 最基本的性质是群的运算, 也就是左、右平移. 于是在左 (右) 平移下不变的向量场、一次微分形式和仿射联络就有其特殊的意义, 或者最重要的价值. 这就是本节要讨论的.

以 $\mathcal{D}^1(G)$ 表示解析向量场集合, $\mathcal{D}_1(G)$ 表示解析一次微分形式集合.

定义 2.2.1 G 是李群, 向量场 $X \in \mathcal{D}^1(G)$ 称为**左不变向量场**, 如果 $\forall g \in G$ 有 $dL_g(X) = X$.

定理 2.2.1 1) 李群 G 的所有左不变向量场的集合 $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$ 构成李代数, 称为李群 G 的**李代数**.

2) 李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 与 G 在 e 处的切空间 $T_e(G)$ 在映射 $X \to X|_e = X_e, X \in \mathfrak{g}$ 下是同构的线性空间. 因而 $\dim \mathfrak{g} = \dim G$. 由此可在 $T_e(G)$ 中定义换位运算为 $[X_e,\ Y_e] = [X,\ Y]_e, \forall X_e,\ Y_e \in T_e(G)$ (其中 $X,\ Y$ 是左不变向量场, 在 e 处的值分别为 $X_e,\ Y_e$), $T_e(G)$ 为与 $\mathfrak{g}$ 同构的李代数.

证 为行文方便, 我们不妨假定 G 是实解析流形.

1) 对 $\alpha \in \mathbf{R}, X,\ Y \in \mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned}
&dL_g(\alpha X) = \alpha dL_g(X) = \alpha X, \\
&dL_g(X + Y) = dL_g(X) + dL_g(Y) = X + Y, \\
&dL_g([X,\ Y]) = [dL_g(X),\ dL_g(Y)] = [X,\ Y].
\end{aligned}$$

因而 $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$ 是李代数.

2) 显然 $X \to X_e$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $T_e(G)$ 的线性映射. 又若 $X \in \mathfrak{g}$, 则 $dL_g(X) = X$. 因此, 若 $Y \in \mathfrak{g}$, 而 $X_e = Y_e$, 则 $\forall g \in G$, 有 $X_g = dL_g(X_e) = dL_g(Y_e) = Y_g$. 故 $X = Y$. 因此 $X \to X_e$ 是一一映射.

又对任一 $X_e \in T_e(G)$, 令 $X = \{X_g = dL_g(X_e) | g \in G\}$. 显然 $X_g \in T_g(G)$. 由于 L_g 是 G 到 G 的解析同胚, 故 $g \to X_g = dL_g(X_e)$ 在 G 上解析, 故 X 是 G 的解析向量场. 又对任何 $h \in G$, 有

$$dL_h(X_g) = dL_h(dL_g(X_e)) = dL_{hg}(X_e) = X_{hg},$$

即 $dL_h(X) = X$, 即 $X \in \mathfrak{g}$. 显然 $X \to X|_e = X_e$.

总结以上得 $X \to X_e$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $T_e(G)$ 上的线性同构映射, 于是 $\dim G = \dim \mathfrak{g}$. 且可在 $T_e(G)$ 中引进换位运算, 使 $T_e(G)$ 为李代数. □

$\mathrm{Lie}\, G$ 可理解为左不变向量场构成的李代数, 也可以将它理解为单位元素 e 的切空间 $T_e(G)$ 构成的李代数. 设 $(U,\ \varphi)$ 是单位 e 处的一个标架, 仍以 x 表示 $\varphi(x)$. $f(x,\ y)$ 是乘法函数, $l^i_j(x)$ 是辅助函数. 令

$$L(x) = (l^i_j(x)), \quad L^{-1}(x) = (\tilde{l}^i_j(x)).$$

引理 2.2.1 设 $(U,\ \varphi)$ 是李群 G 的一个单位标架, $f(x,y)$, $l^i_j(x)$ 分别为乘法函数及辅助函数. 对应于 $T_e(G)$ 的基 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_e, \left.\dfrac{\partial}{\partial 2_2}\right|_e, \cdots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_e$ 的左不变向量场 X_1,

$X_2, \cdots, X_n$ 在 (U, φ) 中的坐标为 $(X_i)_x = \sum\limits_{j=1}^{n} l_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}, 1 \leqslant i \leqslant n$.

证　由定理 2.2.1 知 $(X_i)_x = dL_x(X_i)_e = dL_x\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)_e$. 然而 $L_x(y) = xy = f(x, y)$. 则有

$$dL_x\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_e = \left(dL_x\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right)_{y=e} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial y_i}\Big|_{y=e}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}. \quad \square$$

例 2.2.1　$\mathbf{R}^n$ 对向量加法 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ 构成李群, 乘法函数为 $f_i(x, y) = x_i + y_i$, 辅助函数为 $l_j^i(x) = \delta_j^i$.

于是 $T_0(\mathbf{R}^n)$ 中基 $\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}$ 对应的左不变向量场为 $(X_i)_x = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. 于是 $[X_i, X_j] = 0$, 即 $\mathrm{Lie}\,\mathbf{R}^n$ 是 n 维交换李代数.

由此也可以知道, 可将 $\mathrm{Lie}\,\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 等同起来.

例 2.2.2　$GL(n, \mathbf{R})$ 的乘法函数为 $f_{ij}(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}$, 辅助函数为 $l_{st}^{ij}(x) = \dfrac{\partial f_{ij}(x, y)}{\partial y_{st}}\Big|_{y=I_n} = x_{is}\delta_{jt}$. 因而对应于 $T_{I_n}(GL(n, \mathbf{R}))$ 中切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$ 的左不变向量场为 $X_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} x_{si}\dfrac{\partial}{\partial x_{sj}}$. 因而 $[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}$. 因而 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}X_{ij} \to (\alpha_{ij})$ 是 $\mathrm{Lie}\,GL(n, \mathbf{R})$ 到 $gl(n, \mathbf{R})$ 的同构映射, 可记 $\mathrm{Lie}\,GL(n, \mathbf{R}) = gl(n, \mathbf{R})$.

定理 2.2.2　设 G 为李群, (U, φ) 为单位 e 处的标架, $f(x, y)$, $l_j^i(x)$ 分别为乘法函数, 辅助函数. 令 $L(x) = \left(l_j^i(x)\right)$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_j}\right)$. 则有

1) (**Lie 的第一基本定理**)　$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = L(xy)L(y)^{-1}$, $\forall x, y \in W \subseteq U$, W 是 e 的邻域;

2) (**Lie 的第二基本定理**)　$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(l_i^k(x)\dfrac{\partial l_j^q(x)}{\partial x_k} - l_j^k(x)\dfrac{\partial l_i^q(x)}{\partial x_k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{ij}^k l_k^q(x)$.

3) (**Lie 的第三基本定理**)　在上式中 C_{ij}^k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ 是常数, 且满足

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0, \quad \sum_{l=1}^{n}(C_{ij}^l C_{lk}^q + C_{jk}^l C_{li}^q + C_{ki}^l C_{lj}^q) = 0.$$

证　取 $W \subseteq U$, 使 $W^3 \subseteq U$. 于是有

$$f(x, yz) = f(xy, z), \quad \forall x, y, z \in W,$$

即 $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$. 由此得

$$\left.\frac{\partial f_i(x, f(y, z))}{\partial z_j}\right|_{z=e} = \left.\frac{\partial f_i(f(x, y), z)}{\partial z_j}\right|_{z=e}.$$

故有

$$\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(x, w)}{\partial w_k}\right|_{w=y} \left.\frac{\partial f_k(y, z)}{\partial z_j}\right|_{z=e} = l_j^i(xy), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_k} l_j^k(y) = l_j^i(xy).$$

因而有 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} L(y) = L(xy)$. 因此 1) 成立.

$\left\{X_i = \sum\limits_{j=1}^{n} l_i^j(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right\}$ 是 Lie G 的基, 故 $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k} C_{ij}^k X_k$, C_{ij}^k 是常数, 且满足 3) 中条件. 再由

$$\begin{aligned}[X_i, X_j] &= \left(\sum_{r=1}^{n} l_i^r(x) \frac{\partial}{\partial x_r}\right)\left(\sum_{s=1}^{n} l_j^s(x) \frac{\partial}{\partial x_s}\right) - \left(\sum_{s=1}^{n} l_j^s(x) \frac{\partial}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{r=1}^{n} l_i^r(x) \frac{\partial}{\partial x_r}\right) \\ &= \sum_{r,s=1}^{n} l_i^r(x) \frac{\partial l_j^s(x)}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial x_s} - \sum_{r,s=1}^{n} l_j^s(x) \frac{\partial l_i^r(x)}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial x_r},\end{aligned}$$

在第一个和式中将指标 r, s 换成 k, q, 第二个和式中将指标 r, s 换成 q, k, 则得

$$[X_i, X_j] = \sum_{q,k=1}^{n} \left(l_i^k(x) \frac{\partial l_j^q(x)}{\partial x_k} - l_j^k(x) \frac{\partial l_i^q(x)}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_q}.$$

另一方面, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k = \sum\limits_{k,q=1}^{n} C_{ij}^k l_k^q(x) \dfrac{\partial}{\partial x_q}$. 于是 2) 成立, 因而 3) 也成立. □

定义 2.2.2 设 G 是李群. $\omega \in \mathcal{D}_1(G)$ 称为左不变的 (亦名**Maurer-Cartan 形式**), 如果 $L_g^* \omega = \omega, \quad \forall g \in G$.

由于 dL_g 将 $T_x(G)$ 映到 $T_{gx}(G)$, 因而 L_g^* 将 $T_{gx}^*(G)$ 映到 $T_x^*(G)$. 因此知, ω 是 Maurer-Cartan 形式, 即 $L_g^* \omega_x = \omega_{g^{-1}x}, \forall x, g \in G$.

定理 2.2.3 设 G 是 n 维李群. 则

1) $\omega \in \mathcal{D}_1(G)$ 是 Maurer-Cartan 形式, 当且仅当 $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\langle X, \omega\rangle$ 是常数.

2) G 上所有 Maurer-Cartan 形式构成的线性空间是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间.

又若 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的对偶基, 且 $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k$, 则

$$d(\omega_i) = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} C_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k = -\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} C_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k, \quad d \text{ 是外微分算子}.$$

证明 1) 设 ω 是 Maurer-Cartan 形式, $X\in\mathfrak{g}$, 则

$$\langle X,\ \omega\rangle_h=\langle X,\ L_g^*\omega\rangle_h=\langle dL_gX,\ \omega\rangle_{g^{-1}h}=\langle X,\ \omega\rangle_{g^{-1}h},$$

即 $\langle X,\ \omega\rangle=$ 常数.

反之, 由 $\langle X,\ \omega\rangle_{gh}=\langle X,\ \omega\rangle_h=\langle dL_gX,\ \omega\rangle_h=\langle X,\ L_g^*\omega\rangle_{gh}$, 有 $L_g^*\omega_{gh}=\omega_h$, 即 $L_g^*\omega=\omega$.

2) 设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 如果能找到 Maurer-Cartan 形式 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n$ 使得 $\langle X_i,\ \omega_j\rangle=\delta_{ij}$, 则任何 Maurer-Cartan 形式 ω 有表达式 $\omega=\sum\limits_{i=1}^n\langle X_i,\ \omega\rangle\omega_i$. 由结论 1), $\langle X_i,\ \omega\rangle$ 是常数. 于是所有 Maurer-Cartan 形式构成 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$, 而且由

$$2d\omega_i(X_p,\ X_q)=X_p\langle X_q,\ \omega_i\rangle-X_q\langle X_p,\ \omega_i\rangle+(-1)^{2+1}\langle[X_p,\ X_q],\ \omega_i\rangle=-C_{pq}^i$$

及

$$\begin{aligned}-\sum_{j,k}C_{jk}^i\omega_j\wedge\omega_k(X_p,\ X_q)&=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}C_{jk}^i(\langle X_p,\ \omega_j\rangle\langle X_q,\ \omega_k\rangle-\langle X_q,\ \omega_j\rangle\langle X_p,\ \omega_k\rangle)\\&=-\frac{1}{2}(C_{pq}^i-C_{qp}^i)=-C_{pq}^i,\end{aligned}$$

知结论 2) 成立.

最后, 我们来找出 $\{\omega_i\}$. 由于左平移是解析同胚, 因而只要在单位附近找出 $\{\omega_i\}$ 就可以了. 此时可取 $X_i=\sum\limits_{j=1}^n l_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}, 1\leqslant i\leqslant n$. 由 $L(x)=(l_i^j(x))$ 在 e 附近可逆, 设 $L(x)^{-1}=(\tilde{l}_j^i(x))$. $\tilde{l}_j^i(x)$ 是解析的, 于是 $\omega_i=\sum\limits_{k=1}^n\tilde{l}_k^i(x)dx_k,\ 1\leqslant i\leqslant n$ 是解析的一次微分形式, 而且有

$$\langle X_i,\ \omega_j\rangle=\sum_{s,t}l_i^s(x)\tilde{l}_t^j(x)\left\langle\frac{\partial}{\partial x_s},\ dx_t\right\rangle=\sum_{t=1}^n\tilde{l}_t^j(x)l_i^t(x)=\delta_{ij}.$$

由此可知 $\{\omega_i\}$ 是存在的. □

定义 2.2.3 李群 G 上的仿射联络 ∇ 叫做**左不变的**, 如果 $\forall g\in G$, L_g 都是 G 的仿射变换, 即 $\forall X,\ Y\in\mathcal{D}^1(G)$, $\nabla_X(Y)=dL_{g^{-1}}(\nabla_{dL_g(X)}(dL_gY))$.

定理 2.2.4 设 $\mathfrak{g}$, ∇ 是李群 G 的李代数与仿射联络. 则 ∇ 是左不变的充分必要条件是, 对任何 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $\nabla_X(Y)\in\mathfrak{g}$.

证 设 ∇ 是左不变的, 又 $X,\ Y\in\mathfrak{g}$. 由于 $\forall g\in\mathfrak{g}$, $dL_gX=X$, $dL_gY=Y$, 故 $\nabla_X(Y)=dL_{g^{-1}}(\nabla_{dL_g(X)}(dL_gY)=dL_{g^{-1}}\nabla_X(Y)$, 即 $\nabla_X(Y)$ 是左不变的, 因而 $\nabla_X(Y)\in\mathfrak{g}$.

反之, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, 有 $\nabla_X(Y) \in \mathfrak{g}$. 在 $\mathfrak{g}$ 中取一组基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 则对任何 $Z, Z' \in \mathcal{D}^1(G)$ 有 $f_i, h_j \in C^\omega(G)$, 使得 $Z = \sum\limits_{i=1}^n f_i X_i$, $Z' = \sum\limits_{j=1}^n h_j X_j$. 于是有 $dL_g(Z) = \sum\limits_{i=1}^n (f_i L_{g^{-1}})(dL_g X_i)$, $dL_g(Z') = \sum\limits_{j=1}^n (h_j L_{g^{-1}})(dL_g X_j)$, $\nabla_{X_i}(X_j) = dL_g(\nabla_{X_i}(X_j))$. 由此得

$$\begin{aligned}
&\nabla_{dL_g(Z)}(dL_g(Z'))\\
&= \sum_{i,j=1}^n (f_i L_{g^{-1}}) \nabla_{dL_g(X_i)} (h_j L_{g^{-1}})(dL_g(X_j))\\
&= \sum_{i,j=1}^n (f_i L_{g^{-1}}) dL_g(X_i)(h_j L_{g^{-1}}) dL_g(X_j) + \sum_{i,j=1}^n (f_i L_{g^{-1}})(h_j L_{g^{-1}}) \nabla_{dL_g(X_i)}(dL_g X_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^n ((f_i X_i h_j) L_{g^{-1}}) dL_g(X_j) + \sum_{i,j=1}^n ((f_i h_j) L_{g^{-1}}) \nabla_{dL_g(X_i)}(dL_g(X_j))\\
&= \sum_{i,j=1}^n dL_g(f_i X_i h_j) X_j + dL_g(f_i h_j \nabla_{X_i}(X_j)) = dL_g(\nabla_Z(Z')).
\end{aligned}$$

因而 ∇ 是 G 的左不变联络. □

设 ∇ 是 G 的左不变联络, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 由于 $\nabla_{X_i}(X_j) \in \mathfrak{g}$, 故有常数 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ 使得 $\nabla_{X_i}(X_j) = \sum\limits_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$.

特别地, 若 $X = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i X_i$, $Y = \sum\limits_{j=1}^n \beta_j X_j \in \mathfrak{g}$, 则有 $\nabla_X(Y) = \sum\limits_{i,j,k=1}^n \alpha_i \beta_j \Gamma_{ij}^k X_k$.

如果 $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$, Γ_{ij}^K 的取值如下:

1) $\Gamma_{ij}^k = 0$, 即 $\nabla_{X_i}(X_j) = 0$, 称为 $(-)$ 联络, 此时 $\nabla_X(Y) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$;

2) $\Gamma_{ij}^k = \dfrac{1}{2} C_{ij}^k$ 即 $\nabla_{X_i}(X_j) = \dfrac{1}{2}[X_i, X_j]$, 称为 (0) 联络, 此时 $\nabla_X(Y) = \dfrac{1}{2}[X, Y]$;

3) $\Gamma_{ij}^k = C_{ij}^k$ 即 $\nabla_{X_i}(X_j) = [X_i, X_j]$, 称为 $(+)$ 联络, 此时 $\nabla_X(Y) = [X, Y]$.

那么在 $(-)$, (0), $(+)$ 联络下均有 $\nabla_X(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$.

习　题

1. 求平面转动群的李代数.
2. 求 3 维 Euclid 空间转动群的李代数.

3. 求 3 维 Euclid 空间的等距变换群的李代数.
4. 设 G_1, G_2 是李群, 求 $G_1 \otimes G_2$ 的李代数.
5. 求 $GL(n, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{R}^n$ 的李代数.
6. $GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ 的李代数.

2.3 单参数子群与指数映射

李群 G 作为微分流形, 若有仿射联络 ∇, 自然要考虑测地线. 作为群自然要考虑子群. 这两者的结合, 就是本节所要讨论的内容.

定义 2.3.1 若映射 $\theta\colon \mathbf{R} \to G$ 解析, 而且是群同态映射 (简称**解析同态**), 则称 $\theta(t)$ 是 G 的一个**单参数子群**.

定理 2.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 与 G 的单参数子群之间有一一对应关系: $X \to \theta(t)$, 使得 $\theta(0) = e$, $\dot{\theta}(t) = X_{\theta(t)}$.

设 ∇ 是李群 G 的左不变联络, $X_e \in T_e(G)$, 则测地线 $\gamma_{X_e}(t)$ 是 G 的单参数子群当且仅当对应于 X_e 的左不变向量场 X 满足 $\nabla_X(X) = 0$.

证 设 $\theta(t)$ 是单参数子群, $\theta(0) = e$. 令 X 为对应于 $\dot{\theta}(0) = X_e$ 的左不变向量场. 由于 $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$, 即有 $\theta \cdot L_s = L_{\theta(s)} \cdot \theta$. 所以 $d\theta \cdot dL_s = dL_{\theta(s)} \cdot d\theta$. 故

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(s) &= d\theta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_s = d\theta \cdot dL_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_0 \\ &= dL_{\theta(s)} \cdot d\theta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)_0 = dL_{\theta(s)}\dot{\theta}(0) \\ &= dL_{\theta(s)}X_e = X_{\theta(s)}.\end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \xrightarrow{L_s} & \mathbf{R} \\ \theta\downarrow & & \downarrow\theta \\ G & \xrightarrow{L_{\theta(s)}} & G\end{array}$$

反之, 设 $X \in \mathfrak{g}$. 我们先构造 G 中曲线 $\Gamma(t)$, 使得 $\Gamma(0) = e$, $\dot{\Gamma}(t) = X_{\Gamma(t)}$. 在 e 的标架 (U, φ) 中 $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, 并有解析函数 X_i 使得 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. 微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_i(t)}{\mathrm{dt}} = X_i(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)), \\ x_i(0) = e_i,\end{cases}$$

在 $[0,\ \varepsilon]$ 中有解析解 $(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)) = \Gamma(t) \subset G$. 故当 $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ 时, 有

$$\begin{cases}\Gamma(0) = e, \\ d\Gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) = \displaystyle\sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = X_{\Gamma(t)}.\end{cases}$$

故 Γ 在 $[0,\ \varepsilon]$ 上解析. 现将 Γ 开拓到 $(-\infty,\ +\infty)$. $\forall t\in\mathbf{R}$, 有整数 n, 使得 $n\varepsilon\leqslant t\leqslant(n+1)\varepsilon$. 令 $\Gamma(t)=\Gamma(n\varepsilon)\Gamma(t-n\varepsilon)$. 显然 $\Gamma(n\varepsilon)=\Gamma(\varepsilon)^n$. 即在 $[n\varepsilon,\ (n+1)\varepsilon]$ 上有

$$\Gamma(t)=L_{\Gamma(n\varepsilon)}\Gamma(L_{-n\varepsilon}(t)).\qquad \begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \xrightarrow{L_{-n\varepsilon}} & \mathbf{R}\\ \Gamma\downarrow & & \downarrow\Gamma\\ G & \xleftarrow{L_{\Gamma(n\varepsilon)}} & G\end{array}$$

故 $d\Gamma=dL_{\Gamma(n\varepsilon)}\cdot d\Gamma\cdot dL_{-n\varepsilon}$. 因而

$$\begin{aligned}\dot\Gamma(t)&=d\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t=dL_{\Gamma(n\varepsilon)}\cdot d\Gamma\cdot dL_{-n\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t=dL_{\Gamma(n\varepsilon)}\cdot d\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{t-n\varepsilon}\\&=dL_{\Gamma(n\varepsilon)}X_{\Gamma(t-n\varepsilon)}=X_{\Gamma(n\varepsilon)\Gamma(t-n\varepsilon)}=X_{\Gamma(t)}.\end{aligned}$$

取 G 的左不变仿射联络 ∇, 使 $\nabla_X(X)=0$. 于是 $\Gamma(t)$ 是 G 的极大测地线. 对 $s\in\mathbf{R}$, 考虑 G 中曲线 $\Gamma_s(t)=\Gamma(s)\Gamma(t)=L_{\Gamma(s)}\Gamma(t)$. 显然有

$$\begin{cases}\Gamma_s(0)=\Gamma(s),\\ \dot\Gamma_s(t)=d\Gamma_s\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=dL_{\Gamma(s)}d\Gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=X_{\Gamma(s)\Gamma(t)}.\end{cases}$$

特别, $\dot\Gamma_s(0)=X_{\Gamma(s)}$. 显然 $\Gamma_s(t)$ 也是 G 的测地线. 又对于 $\Gamma(s+t)$, 有 $\Gamma(s+0)=\Gamma(s)$, $\dot\Gamma(s+0)=\dot\Gamma(s)$. 故 $\Gamma(s)\Gamma(t)$, $\Gamma(s+t)$ 均过 $\Gamma(s)$, 切向量均为 $\dot\Gamma(s)$, 又都是测地线, 因而 $\forall s,\ t\in\mathbf{R}$, $\Gamma(s+t)=\Gamma(s)\Gamma(t)$. 故 $\Gamma(t)$ 是 G 的单参数子群, 且 $\dot\Gamma(t)=X_{\Gamma(t)}$.

前面的证明中已说明, 若 $\nabla_X(X)=0$, 则 $\gamma_{X_e}(t)=\Gamma(t)$ 是单参数子群. 反之, 若 $\gamma_{X_e}(t)$ 是单参数子群, 设 X 是对应于 X_e 的左不变向量场, 则有 $\dot\gamma_{X_e}(t)=X_{\gamma_{X_e}(t)}$ 及 $\nabla_{X_{\gamma_{X_e}(t)}}(X_{\gamma_{X_e}(t)})|_{\gamma_{X_e}(t)}=0$. 注意到 $X\in\mathfrak{g}$, $\nabla_X(X)\in\mathfrak{g}$, $X\to X_e$ 是一一对应, 故由 $\nabla_X(X)|_e=0$ 立即得到 $\nabla_X(X)=0$. □

定义 2.3.2 设 X 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中任一元素, $\theta(t)$ 是对应的单参数子群. 映射 $\exp: X\to\theta(1)$ 称为**指数映射**.

定理 2.3.2 设 $X\in\mathfrak{g}$, $\theta(t)$ 为对应的单参数子群. 则有 $\theta(t)=\exp tX$. 进而 $\exp(t+s)X=\exp tX\exp sX$, $\forall t,\ s\in\mathbf{R}$.

证 取左不变仿射联络 ∇, 使 $\nabla_X(X)=0$. 于是也有 $\nabla_{tX}(tX)=0$, $\forall t\in\mathbf{R}$. 因而有

$$\theta(t)=\gamma_{X_e}(t)=\gamma_{tX_e}(1)=\exp tX,$$

其中 γ_{X_e}, γ_{tX_e} 为测地线. 因而又有

$$\exp(t+s)X=\theta(t+s)=\theta(t)\theta(s)=\exp tX\exp sX.$$ □

例 2.3.1 在例 2.2.2 中知道 $gl(n, \mathbf{R})$ 与 $GL(n, \mathbf{R})$ 的李代数同构. $X = (\alpha_{ij}) \in gl(n, \mathbf{R})$ 对应于 $T_{I_n}(GL(n\,\mathbf{R}))$ 中切向量 $\sum\limits_{ij} \alpha_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$ 所对应的左不变向量场仍以 X 表示, 则 $\exp tX = e^{tX} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} X^k$.

注 对 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 或 $(\mathbf{C}^{n\times n})$, e^A 的收敛性证明如下.

令 $m = \max\{|\mathrm{ent}_{ij}A| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 满足 $\mathrm{ent}_{ij}M = m$.

首先, 可归纳地证明 $\mathrm{ent}_{ij}M^k = n^{k-1}m^k$, $\quad |\mathrm{ent}_{ij}A^k| \leqslant \mathrm{ent}_{ij}M^k$.

$k = 1$ 时, 结论自然成立. 由

$$\mathrm{ent}_{ij}M^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{ent}_{il}M^k \mathrm{ent}_{lj}M = \sum_{l=1}^{n} n^{k-1}m^k m = n^k m^{k+1}$$

及

$$\begin{aligned}|\mathrm{ent}_{ij}A^{k+1}| &= \left|\sum_{l=1}^{n} \mathrm{ent}_{il}A^k \mathrm{ent}_{lj}A\right| \\ &\leqslant \sum_{l=1}^{n} |\mathrm{ent}_{il}A^k|\,|\mathrm{ent}_{lj}A| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |\mathrm{ent}_{il}M^k|\,|\mathrm{ent}_{lj}M| \leqslant n^k m^{k+1} \\ &= \mathrm{ent}_{ij}M^{k+1}\end{aligned}$$

知结论成立.

其次, 证明 $e^M = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} M^k$ 收敛. 事实上,

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{ij}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k\right) \\ =&\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} m^k = \delta_{ij} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(nm)^k = \delta_{ij} + \frac{1}{n}(\mathrm{e}^{nm} - 1).\end{aligned}$$

最后, 由 e^M 收敛得到 e^A 收敛.

e^A 有以下一些性质.

1) 若 $[A, B] = 0$, 则 $e^A e^B = e^{A+B}$;

事实上, $e^A e^B = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{\infty} \dfrac{1}{l!} B^l\right) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{k+l=m} \dfrac{m!}{k!l!} A^k B^l = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!}(A + B)^m = e^{A+B}$;

2) 若 P 可逆, 则 $Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$;

3) $\det e^A = e^{\mathrm{tr}A}$, 故 e^A 可逆;

4) 设 $X=\begin{pmatrix}0 & -x\\ x & 0\end{pmatrix}$, 则有 $e^X=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$.

事实上, 注意 $X^k = x^k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$; $X^k = x^k\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $k\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$; $X^k = x^k\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $k\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,4)$; $X^k = x^k\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $k\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$. 于是

$$e^X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} & \displaystyle-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}.$$

指数映射不仅决定了李群的单参数子群与李代数的关系. 而且可以建立李群作为流形的坐标系. 这依赖下面的定理.

定理 2.3.3 *设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, $\exp$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射, 则 $\exp$ 解析, 而且在 $\mathfrak{g}$ 的原点附近 $\exp$ 是解析同胚.*

又若 G 连通, 则 $\exp\mathfrak{g}=\{\exp X|X\in\mathfrak{g}\}$ 生成 G.

证 取定 e 的标架, 设乘法函数、辅助函数分别为 $f(x, y)$, $l_j^i(x)$. 于是 $X_i=\sum\limits_{j=1}^{n} l_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $1\leqslant i\leqslant n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. $X\in\mathfrak{g}$, 有 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$. 于是对 $|t|<\varepsilon$, $\exp tX=\theta(t)$ 在坐标邻域中. 故有 $\exp tX=\theta(t)=(\theta_1(t), \theta_2(t), \cdots, \theta_n(t))$. $\theta_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$ 是下述微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta_j(t)}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i^j(\theta(t)),\\ \theta_j(0)=e_j\end{cases}$$

的解. 因而 $\theta_j(t)=\theta_j(t;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 不仅对 t 解析, 对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 也解析. 由于左平移是解析同胚, 因而对于 $t<\infty$, $\exp tX$ 关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 解析. 取 $t=1$, 则得到 $\exp X$ 关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 解析. 又由于 $\dfrac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_j}(e)=l_j^i(e)=\delta_{ij}$, 故 $\exp$ 在 $\mathfrak{g}$ 的原点附近是解析同胚.

从上面讨论知有 $\mathfrak{g}$ 中 0 的邻域 N_0 与 G 中 e 的邻域 N_e 在 $\exp$ 下解析同胚, 因而 $\exp N_0=N_e$.

现设 G 连通. 不妨设 N_e 是开集, 故 $V = N_e \cap N_e^{-1}$ 是开集, 且 $V^{-1} = V$. 令 G_1 为 V 生成的 G 的子群. 于是

$$G_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} N_e^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\exp N_0)^k \subseteq G.$$

V 是开集, 故 G_1 是开集. 于是 $\forall g \in G$, gG_1 是开集. 而 $G_1 = G \setminus \bigcup\limits_{g \notin G_1} gG_1$ 为 G 的闭集. 故 $G_1 = G$. 因此 $\exp \mathfrak{g}$ 生成 G. □

定义 2.3.3　N_0, N_e 如上, 则对 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_i\}$, 有 $N_e = \left\{ \exp \sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i \in N_0 \right\}$. 于是 $\exp \sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 N_e 上的坐标系, 称为**第一类标准坐标系**.

这种做法可以更一般化.

设 G 是李群. 它的李代数 $\mathfrak{g}$ 有空间直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 \dot{+} \mathfrak{m}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{m}_s$, 则存在 0 在 $\mathfrak{m}_i$ 中的有界、连通开邻域 $U_{\mathfrak{m}_i}$, 使得映射 Φ: $(A_1, A_2, \cdots, A_r) \to \exp A_1 \exp A_2 \cdots \exp A_r$, $A_i \in U_{\mathfrak{m}_i}$ 是 $U_{\mathfrak{m}_1} \times U_{\mathfrak{m}_2} \times \cdots \times U_{\mathfrak{m}_r}$ 到 e 在 G 中某个开邻域上的解析同胚.

$r = n$, $r = 2$ 时, 由此立即可以得到下面定义.

定义 2.3.4　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 则存在 e 的邻域 N_e, 使得 $\forall g \in N_e$, 有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $g = \exp x_1 X_1 \exp x_2 X_2 \cdots \exp x_n X_n$, 而且 $g \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 N_e 上的一个坐标系. 此坐标系称为**第二类标准坐标系**.

定义 2.3.5　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 则存在 e 的邻域 N_e, 使得 $\forall g \in N_e$, 有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足 $g = \exp \sum\limits_{i=1}^{r} x_i X_i \exp \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i X_i$, 而且 $g \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 N_e 上的一个坐标系. 此坐标系称为**第三类标准坐标系**.

利用标准坐标系可以证明: 单参数子群定义中的解析条件可以减弱为连续.

定理 2.3.4　若 σ: $t \to \sigma(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 到李群 G 的连续同态, 则 $\sigma(t)$ 是 G 的单参数子群.

Taylor 公式是很重要的公式, 其对于左不变向量场也是有的.

定理 2.3.5　设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数. 则存在 $\mathfrak{g}$ 的原点邻域 N_0, 满足: 若 $X \in N_0$, 则对 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tX \in N_0$, 并且对于 G 上解析函数 f, 有 $f(g \exp X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} (X^n f)(g) = e^X f(g)$, $X \in N_0$.

证　设 $\theta(t) = \exp tX$. 于是 $f(g \exp tX)$ 是 t 的解析函数. 又 $\dot{\theta}(t) = X_{\theta(t)}$. 于

是有

$$(Xf)(g) = (Xf \cdot L_g)(\exp tX|_{t=0}) = \left(d\theta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f \cdot L_g\right)(\exp tX|_{t=0})$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g \exp tX)|_{t=0},$$
$$Xf(g\exp uX) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\right)(g \exp uX \exp tX)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(g \exp uX).$$

因而一般有 $X^n f(g\exp uX) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} f(g\exp uX)$. 又 $f(g\exp tX)$ 解析, 故有

$$f(g\exp tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(g \exp tX)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(X^n f)(g).$$

令 $t = 1$, 即得. □

注 这个公式叫做 **Taylor 公式**. 一般地, $\forall X \in \mathfrak{g}$, t 充分小后 $tX \in N_0$, 因而有 $f(g\exp tX) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}(X^n f)(g) = e^{tX} f(g)$.

定理 2.3.6 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射, 则有

$$\exp tX \exp tY = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,\ Y] + o(t^3)\right),$$
$$\exp(-tX)\exp(-tY)\exp tX \exp tY = \exp(t^2[X,\ Y] + o(t^3)),$$
$$\exp tX \exp tY \exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,\ Y] + o(t^3)),$$

其中 t 为趋于零的实参数, $\dfrac{1}{t^3}o(t^3)$ 在 $|t|$ 充分小时有界, 而且对 t 解析.

证 对充分小的 t, 有 $\exp tX \exp tY = \exp Z(t)$. 若以 φ 表示第一标准坐标系, 显然有

$$z_i(t) = \varphi_i(\exp Z(t)) = \varphi_i(\exp tX \exp tY) = e^{tX} e^{tY} \varphi_i(e)$$
$$= (1 + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3))\varphi_i(e)$$
$$= (1 + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X+Y)^2 + \frac{t^2}{2}(XY - YX) + O(t^3))\varphi_i(e)$$
$$= e^{t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,\ Y] + O(t^3)}\varphi_i(e)$$
$$= \varphi_i(\exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,\ Y] + O(t^3)).$$

因而有 $Z(t) = t(X+Y) + \dfrac{t^2}{2}[X,\ Y] + o(t^3)$. 其余两个公式可以类似地证明. □

定理 2.3.7 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数. $\mathfrak{g}$ 作为 Euclid 空间, 对加法是李群, 其李代数可与 $\mathfrak{g}$ 本身等同, 即 $\mathrm{Lie}\,\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$. $\exp$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射, 则有

$$d\exp_X = d(L_{\exp X})_e \cdot \frac{\mathrm{id}-e^{-\mathrm{ad}\,X}}{\mathrm{ad}\,X}, \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

其中 $\mathrm{ad}\,X$ 定义为: $\mathrm{ad}\,X(Y)=[X,\ Y]$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$.

我们略去这个结果的证明.

习 题

1. $X \in gl(n,\mathbf{R})$, 且 $X'=-X$. 则 $\forall t \in \mathbf{R}$, $\exp tX$ 是正交矩阵, 且行列式为 1. 反之, A 是行列式为 1 的正交矩阵, 则有实反对称矩阵 X 使得 $A=\exp X$.

2. 设 $X \in gl(n,\mathbf{R})$, 则 $\det\exp X = e^{\mathrm{tr}X}$.

3. 设 $X \in gl(2,\mathbf{R})$, $\mathrm{tr}X=0$. 证明下列等式

$$e^X = \cosh(-\det X)^{1/2} I + \frac{\sinh(-\det X)^{1/2}}{(-\det X)^{1/2}} X, \quad \det X<0;$$

$$e^X = \cosh(\det X)^{1/2} I + \frac{\sinh(\det X)^{1/2}}{(\det X)^{1/2}} X, \quad \det X>0;$$

$$e^X = I+X, \quad \det X=0.$$

4. 设 $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$. 证明

   1) $\lambda>0, \lambda\neq 1$ 时, 有唯一的 $X \in gl(2,\mathbf{R})$ 使得 $A=e^X$;

   2) $\lambda=-1$ 时, 有无穷多 $X \in gl(2,\mathbf{R})$ 使得 $A=e^X$;

   3) $\lambda<0, \lambda\neq -1$ 时, 无 $X \in gl(2,\mathbf{R})$ 使得 $A=e^X$.

5. 证明定理 2.3.6 中第 2 和第 3 个公式.

2.4 李群的子群

本节讨论李群的李子群, 即既是子群又是子流形的子集合. 当然这与李群的李代数的子代数间有紧密的关系.

定义 2.4.1 李群 G 的子群 (正规子群) H, 若又是 G 的子流形, 则称 H 为 G 的**李子群** (**正规李子群**). 又若 H 是 G 的正则子流形 (即 H 的拓扑是 G 的诱导拓扑), 则称 H 为**正则李子群** (**正则正规李子群**).

李群 G 的李子群 H 必为李群, 因而也是拓扑群.

事实上, 设 $\dim G = n$, H 为 G 的 r 维子流形. $a, b \in H$, 则 $ab \in H$. 于是在 G 中元素 ab 处可选取坐标系 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 使 $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_r)$ (这里 $\bar{z}_i$ 是 z_i 在 H 上的限制) 为 H 中元素 ab 的坐标系. 当 $x \to a$, $y \to b$ 时, 则 $xy \to ab$. $(xy)_i$ 是 x_i, y_i 的解析函数. 从而 $\overline{(xy)}_i$ 是 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ 的解析函数. 故 $(x, y) \to xy$ 在 H 内亦解析. 因而 H 是李群.

李群 G 的连通李子群 H 称为 G 的**解析子群**.

定理 2.4.1 设 H 是李群 G 的李子群, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ 分别为 H, G 的李代数. 则 $\mathfrak{h}$ 可视为 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 且 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | t \to \exp tX$ 是 $\mathbf{R}$ 到 H 中的连续映射$\}$.

反之, 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 则在 $\exp \mathfrak{h}$ 生成的子群 H 中可定义解析结构, 使 H 为 G 的解析子群, 且以 $\mathfrak{h}$ 为其李代数.

因而在 G 的解析子群与 $\mathfrak{g}$ 的子代数间有一一对应关系.

证 设 H 是 G 的李子群, 故 id 是解析映射. 以后用 $\exp_H$, $\exp_G$ 分别表示 H, G 的指数映射. 对任一 $X \in \mathfrak{h}$, $\exp_H tX$ 是 H 中单参数子群. 故 $\mathrm{id}(\exp_H tX) = \exp_G t(d\mathrm{id})X$ 是 G 中单参数子群. 因而 $d(\mathrm{id})X \in \mathfrak{g}$. 又 $d(\mathrm{id})X = d(\mathrm{id})Y$ 当且仅当 $X = Y$; $[d(\mathrm{id})X, d(\mathrm{id})Y] = d(\mathrm{id})[X, Y]$. 故可将 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{g}$ 中的子代数 $d(\mathrm{id})\mathfrak{h}$ 等同. 所以 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 显然有 $\exp_H X = \exp_G X, \quad \forall X \in \mathfrak{h}$. 又若 $X \in \mathfrak{g}$, $t \to \exp tX$ 是 H 中的道路, 则由定理 2.3.4, $\exp tX$ 是 H 中的单参数子群. 因而 $X \in \mathfrak{h}$, 于是有 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | t \to \exp tX$ 是H中道路$\}$.

现设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. H 是由 $\exp \mathfrak{h}$ 生成的子群. 任取 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补空间 $\mathfrak{h}'$, 即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{h}'$. 于是有 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ 的原点邻域 $U_{\mathfrak{h}}$, $U_{\mathfrak{h}'}$ 使得 $U_{\mathfrak{h}} \times U_{\mathfrak{h}'}$ 在映射 $\Phi(A, B) = \exp A \exp B$ 下同胚于 G 的一个单位邻域. 显然 $\exp U_{\mathfrak{h}} \subseteq H$, $\exp U_{\mathfrak{h}}$ 同胚于 $\mathfrak{h}$ 的开集, 而且 $\exp U_{\mathfrak{h}}$ 生成 H. 因而 H 可唯一地定义解析结构, 成为连通李群. 由于 $\exp U_{\mathfrak{h}}$ 是 $\Phi(\exp U_{\mathfrak{h}} \times \exp U_{\mathfrak{h}'})$ 的子流形, 由左平移是解析同胚, 故 H 是 G 的子流形, 因而 H 是 G 的解析子群. 显然 $\mathfrak{h}$ 在 H 的李代数中. 又 $\dim H = \dim \mathfrak{h}$, 于是 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数.

若 G 的解析子群 H_1 与 H_2 的李代数均为 $\mathfrak{h}$, 则 H_1, H_2 均为 $\mathfrak{h}$ 生成, 故作为集合 $H_1 = H_2$. 又 exp 在原点附近为解析同胚, 故 H_1 与 H_2 作为李群亦有 $H_1 = H_2$. □

从此定理可得到构造李群的方法: 从一个已知李群 G 的李代数的子代数构造李子群 H.

从此定理还可得到: 李群 G 的李子群 H_1 与 H_2 作为拓扑群相等, 则作为李群亦相等.

定理 2.4.2 设 H 是李群 G 的闭子群, 则在 H 上有唯一的解析结构使 H 为 G 的正则子群. 且 H 对应的子代数为 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H, \forall t \in \mathbf{R}\}$.

证 用 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数, 令 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp tX \in H, \forall t \in \mathbf{R}\}$.

首先指出, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 若 $X \in \mathfrak{h}$, $s \in \mathbf{R}$, 显然 $sX \in \mathfrak{h}$. 又 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 有

$$\left(\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\right)^n = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2n}[X, Y] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in H,$$

$$\left(\exp\frac{-tX}{n}\exp\frac{-tY}{n}\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(t^2[X, Y] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in H.$$

由 H 闭, 有 $n \to \infty$ 时, 则 $\exp t(X+Y) \in H$, $\exp t^2[X, Y] \in H$. 故 $X+Y \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] \in H$. 于是 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

设 H^* 为 $\mathfrak{h}$ 生成的连通李子群, 则 $H^* \subseteq H$. 以 H^0 表示 H 的单位连通分支, 则 $H^* \subseteq H^0$. 我们将证明作为拓扑群 $H^* = H^0$. 如此 H 可定义解析结构使其成为李群, 并且为 G 的正则李子群.

设 N 为 H^* 的单位邻域, 证明 N 亦为 H^0 的单位邻域. 若不然, 则有序列 $\{c_k\} \subset H \setminus N$, 使得 $c_k \to e$. 设 $\mathfrak{h}'$ 为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补空间, 即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{h}'$. 于是有 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ 的原点邻域 $U_{\mathfrak{h}}$, $U_{\mathfrak{h}'}$ 使得 $\Phi(A, B) = \exp A \exp B$ 将 $U_{\mathfrak{h}} \times U_{\mathfrak{h}'}$ 同胚地映射到 G 的单位邻域. 于是有

$$c_k = \exp A_k \exp B_k, \quad A_k \in U_{\mathfrak{h}},\ B_k \in U_{\mathfrak{h}'}.$$

$\exp A_k \in N$, 则 $B_k \neq 0$. 但 $B_k \to 0$. 由于 $U_{\mathfrak{h}'}$ 有界, 故对 B_k 有整数 r_k 使得

$$r_k B_k \in U_{\mathfrak{h}'}, \quad (r_k+1)B_k \notin U_{\mathfrak{h}'}.$$

由 $U_{\mathfrak{h}'}$ 有界, 不妨设 $r_k B_k \to B \in \mathfrak{h}'$, $(r_k+1)B_k \notin U_{\mathfrak{h}'}$, 而且 $B_k \to 0$. 因而 $B \neq 0$.

对任二整数 p, $q(>0)$ 有 $pr_k = qs_k + t_k$, t_k, s_k 为整数, $0 \leqslant t_k < q$. 显然 $\frac{t_k}{q}B_k \to 0$. 故

$$\exp\frac{p}{q}B = \lim_{k\to\infty}\exp\frac{pr_k}{q}B_k = \lim_{k\to\infty}(\exp B_k)^{s_k} \in H.$$

因而 $B \in \mathfrak{h}$, 这与 $B \neq 0$, $B \in \mathfrak{h}'$ 矛盾. 因而 N 为 H^0 的单位邻域. 如定理 2.3.3 可证作为拓扑群 $H^* = H^0$. □

注　反之, 若 H 是李群 G 的正则子群则必为闭子群.

由这个定理可以得到一般线性群的许多重要的子群.

定义 2.4.2　*一般线性群 $GL(n, \mathbf{R})$ ($\mathbf{GL(n, C)}$) 的子群 G 称为***代数群***, 若存在 n^2 元多项式集 S, 使得 $g = (g_{ij}) \in G$ 的充分必要条件是 $p(g) = p(g_{ij}) = 0$, $\forall p \in S$.*

*群 $GL(n, \mathbf{C})$ 的子群 G 称为***伪代数群***, 如果存在 $2n^2$ 元多项式集 S 使得 $g = (a_{ij} + b_{ij}\sqrt{-1}) \in G$ $(a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R})$ 的充分必要条件是 $p(g) = p(a_{ij}, b_{ij}) = 0, \forall p \in S$.*

定理 2.4.3 一般线性群的代数群与伪代数群均是闭子群. 因而也是李子群.

证 令 $F=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 设 G 是一般线性群的代数群与伪代数群, $g_n \in G$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g \in GL(n,\mathbf{F})$.

由 $p\in S$, $p(g_n)=0$, 可得 $p(g)=\lim\limits_{n\to\infty} p(g_n)=0$. 即 $g\in G$. 故定理成立. □

以下令 $F=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 我们将 $GL(n, F)$ 的李代数看作 $gl(n, F)$. 于是, $X\in gl(n, F)$, 有 $\exp tX = e^{tX}$. 若 H 是 G 的闭子群, $\mathfrak{h}$ 为 H 的李代数, 则 $\mathfrak{h}=\{X\in gl(n, F)|e^{tX}\in H, \forall t\in F\}$.

1) **特殊线性群** $SL(n, F)=\{A\in GL(n, F)|\det A=1\}$.

由 $\det \mathrm{e}^{tX}=1$, 得 $\mathrm{tr}X=0$, 所以 $SL(n, F)$ 的李代数为 $sl(n, F)$.

2) **正交群、特殊正交群** $O(n, F)=\{A\in GL(n, F)|A'A=I_n\}$.

由 $(e^{tX})'e^{tX}=e^{tX'}e^{tX}=I_n$, 得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX'}e^{tX})|_{t=0}=\left(X'e^{tX'}e^{tX}+e^{tX'}Xe^{tX}\right)\Big|_{t=0}=X'+X.$$

所以 $O(n,F)$ 的李代数为 $o(n, F)$.

注意到, 此时 $\mathrm{tr}\,X=\mathrm{tr}\,\dfrac{X'+X}{2}=0$. 故 $\exp o(n, F)$ 生成的群不是 $O(n, F)$, 而是特殊正交群 $SO(n, F)=\{A\in O(n, F)|\det A=1\}=O(n, F)\cap SL(n, F)$. 将此群的李代数记为 $so(n, F)$, 则 $so(n, F)=o(n, F)$.

3) **辛群** $Sp(n, F)=\{A\in GL(n, F)|A'JA=J\}$, 其中 $J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$.

由 $(e^{tX})'Je^{tX}=e^{tX'}Je^{tX}=J$, 得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX'}Je^{tX})|_{t=0}=\left(X'e^{tX'}Je^{tX}+e^{tX'}JXe^{tX}\right)\Big|_{t=0}=X'J+JX.$$

所以 $Sp(n,F)$ 的李代数为 $sp(n, F)$.

4) **Lorentz 群** 设 p, q 为非负整数. $I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p, I_q)$, 令

$$O(p, q, F)=\{A\in GL(p+q, F)|A'I_{p,q}A=I_{p,q}\}.$$

由 $(e^{tX})'I_{p,q}e^{tX}=e^{tX'}I_{p,q}e^{tX}=I_{p,q}$, 得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{p,q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX'}I_{p,q}e^{tX})|_{t=0}=X'I_{p,q}+I_{p,q}X.$$

所以 $O(p, q, F)$ 的李代数为 $o(p, q, F)$.

$O(p, q, F)$ 称为(p, q) 型 **Lorentz 群**. $(p, q)=(1, 3)$, $F=\mathbf{R}$, 即 $O(1, 3, \mathbf{R})$ 就是 Einstein 狭义相对论中的 Lorentz 群.

$p=0$, $q=n$ 及 $p=n$, $q=0$ 为正交群.

5) **酉群** $U(n)=\{A\in GL(n,\ \mathbf{C})|\bar{A}'A=I_n\}$. 是 $GL(n,\ \mathbf{C})$ 的伪代数子群, 视 $GL(n,\ \mathbf{C})$ 为 $2n^2$ 维实李群, 则 $U(n)$ 为 n^2 维实闭子群.

由 $(\overline{e^{tX}})'e^{tX}=e^{t\bar{X}'}e^{tX}=I_n$, 得

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{t\bar{X}'}e^{tX})|_{t=0}=\left(\bar{X}'e^{t\bar{X}'}e^{tX}+e^{t\bar{X}'}Xe^{tX}\right)\Big|_{t=0}=\bar{X}'+X.$$

所以 $U(n)$ 的李代数为 $u(n)$.

6) **特殊酉群** $SU(n)=U(n)\cap SL(n,\ \mathbf{C})$. 李代数为 $su(n)$.

7) **$(p,\ q)$ 型酉群** $U(p,\ q)=\{A\in GL(n,\ \mathbf{C})|\bar{A}'I_{p,q}A=I_{p,q}\}$. 李代数为 $u(p,\ q)$.

8) **特殊 $(p,\ q)$ 型酉群** $SU(p,\ q)=U(p,\ q)\cap SL(p+q,\ \mathbf{C})$. 李代数为 $su(p,\ q)$.

9) **$(p,\ q)$ 型辛群**

$$SP(p,\ q)=\{A\in GL(2(p+q),\ \mathbf{C})|A'JA=J,\bar{A}'K_{p,q}A=K_{p,q}\}.$$

李代数为 $sp(p,\ q)$.

当 $p=0,\ q=n$ 或 $p=n,\ q=0$ 时, 记

$$SP(0,\ n)=SP(n,\ 0)=SP(n)=SP(n,\ \mathbf{C})\cap U(2n).$$

其李代数为 $sp(n)$

10) **特殊正交星群** $SO^*(2n)=\{A\in GL(2n,\ \mathbf{C})|\bar{A}'JA=J,\ A'A=I_{2n}\}$ 是 $2n^2-n$ 维实李群. 李代数为 $so^*(2n)$.

11) **酉星群** $U^*(2n)=\{A\in GL(2n,\ \mathbf{C})|\bar{A}J=JA\}$. 李代数为 $u^*(2n)$

12) **特殊酉星群** $SU^*(2n)=U^*(2n)\cap SL(2n,\ \mathbf{C})$. 李代数为 $su^*(2n)$.

以上这些李群都称为**典型李群**.

习 题

1. 设 $A\in SO(n,\mathbf{R})$, 证明存在 $SO(n,\mathbf{R})$ 的单参数子群包含 A.

2. 证明存在 $A\in SL(n,\mathbf{R})$ 不属于 $SL(n,\mathbf{R})$ 的任何单参数子群.

3. 证明 $\left\{\begin{pmatrix}0 & \alpha & z\\ & \ddots & \beta'\\ & & 0\end{pmatrix}\middle|\alpha,\beta\in\mathbf{R}^{1\times(n-1)},z\in\mathbf{R}\right\}$ 是一个李代数, 并求由它生成的 $GL(n+1,\mathbf{R})$ 的李子群 (它们分别称为**Heisenberg 代数, Heisenberg 群**).

4. 设 $G=GL(n,\mathbf{R})\otimes\mathbf{R}^n$. 求证 $\{(A,0)|A\in GL(n,\mathbf{R})\}$, $\{(I_n,\alpha)|\alpha\in\mathbf{R}^n\}$ 都是 G 的李子群，并求对应的子代数.

5. 设 $G = GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$. 求证 $\{(A, 0)|A \in GL(n, \mathbf{R})\}$, $\{(I_n, \alpha)|\alpha \in \mathbf{R}^n\}$ 都是 G 的李子群, 并求对应的子代数.

2.5 同态与表示

定义 2.5.1 若 φ 是李群 G_1 到李群 G_2 的群同态, 又是连续映射, 则称为**李群的同态**, 简称**同态**. 若 φ 是李群 G_1 到李群 G_2 的群同构, 又是同胚映射, 则称为**李群的同构**, 简称**同构**.

定理 2.5.1 若 φ 是李群 G_1 到李群 G_2 的群同态, 则 φ 为解析映射. 又若 φ 为同构, 则 φ 必为解析同胚.

证 显然, 第二个结论是第一个结论的推论. 因而只要证明第一个结论就行了.

设 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 分别为 G_1, G_2 的李代数, X_1, X_2, $\cdots$, X_n 为 $\mathfrak{g}_1$ 的基. 于是 $s \to \varphi(\exp sX_i)$ 是 $\mathbf{R}$ 到 G_2 的连续同态. 因而由定理 2.3.4, 知 $\varphi(\exp sX_i)$ 是 G_2 的单参数子群. 故有 $Y_i \in \mathfrak{g}_2$, 使得 $\varphi(\exp sX_i) = \exp sY_i$. 因此有

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{n} \exp u_i X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp u_i Y_i.$$

显然, 右式关于 u_1, u_2, $\cdots$, u_n 是解析的. 在 G_1 的某个单位邻域中取第二类标准坐标系, 则 $\prod\limits_{i=1}^{n} \exp u_i X_i$ 的坐标为 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. 这就说明 φ 在 G_1 的单位元处解析. 再由左平移为解析同胚, 故 φ 为 G_1 到 G_2 的解析映射. □

作为本定理的一个重要推论有下面定理.

定理 2.5.2 拓扑群 G 若有两种解析结构均使其为李群, 则这两种解析结构相同, 即拓扑群为李群的解析结构是唯一的.

定理 2.5.3 设 φ 是李群 G_1 到 G_2 上的同态 (同构), $\mathfrak{g}_i$ 是 G_i 的李代数. 则 $d\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 上的同态 (同构), 且 $\varphi(\exp X) = \exp d\varphi(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}_1$.

证 设 $X \in \mathfrak{g}_1$, 则 $\theta_1(t) = \exp tX$, $\theta_2(t) = \varphi(\exp tX)$ 分别为 G_1, G_2 的单参数子群. 故有 $Y \in \mathfrak{g}_2$ 使得 $\theta_2(t) = \exp tY$. 因此有 $X = d\theta_1\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, $Y = d\theta_2\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, $\theta_2 = \varphi\theta_1$. 故有

$$d\theta_2 = d\varphi\, d\theta_1, \quad Y = d\theta_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = d\varphi\, d\theta_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = d\varphi(X),$$

亦即 $\varphi(\exp tX) = \exp t d\varphi(X)$.

$d\varphi$ 显然是线性的, 且 $[d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)] = d\varphi([X_1, X_2])$. 又由 $\varphi(G_1) = G_2$, 因而 $d\varphi T_{e_1}(G_1) = T_{e_2}(G_2)$, 其中 e_i 为 G_i 的单位元素. 故对任一 $Y \in \mathfrak{g}_2$, $Y_{e_2} \in T_{e_2}(G_2)$.

于是有 $X_{e_1} \in Te_1(G_1)$, 使得 $d\varphi X_{e_1} = Y_{e_2}$. 设 X 为 X_{e_1} 对应的左不变向量场, 则有 $\varphi(\exp tX) = \exp td\varphi(X)$. 而 $(d\varphi(X))_{e_2} = Y_{e_2}$. 于是 $d\varphi(X) = Y$. 故 $d\varphi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$.

若 φ 是同构, $X \neq 0$, 则 $\varphi(\exp tX) \neq \{e_2\}$, 即 $d\varphi(X) \neq 0$. 故 $d\varphi$ 是同构. □

推论 若 φ, ψ 均是连通李群 G_1 到李群 G_2 上的同态, 且 $d\varphi = d\psi$, 则 $\varphi = \psi$.

由李群的同态 (同构) 可以得到李代数的同态 (同构). 反之则不然.

例 2.5.1 一维环面 $S^1 = T$ 与 $SO(2)$ 同构. 事实上, $e^{\sqrt{-1}\theta} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 就是同构映射.

例 2.5.2 $\mathbf{R}$ 与 $SO(2)$ 的李代数同构, 但它们同态而不同构. 事实上, $\theta \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 就是同态映射, 但不是一一的, 故不是同构. $\mathbf{R}$ 与 $SO(2)$ 的李代数都是 1 维实李代数, 因而同构.

设 $\mathbf{H}$ 是四元数体, 作为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 4 维非交换结合代数, 有基 $1, i, j, k$, 满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$a, b, c \in \mathbf{R}$, 称 $ai + bj + ck$ 为纯四元数, 所有纯四元数的集合构成一个 3 维子空间.

若将 i 等同于 $\sqrt{-1}$, 则 $\mathbf{H}$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的 2 维线性空间, 此时, $k = \sqrt{-1}j$. 于是 $\mathbf{H}$ 有基 $1, j$, 满足 $\forall z \in \mathbf{C}$, $j^2 = -1$; $zj = j\bar{z}$. 于是 $\mathbf{H}$ 作为 2 维复空间, 有内积:

$$(x_1 + x_2 j, y_1 + y_2 j) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}, \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{C},$$

若 $\alpha = x_1 + x_2 j = a + b\sqrt{-1} + (c + \sqrt{-1}d)j$, 有 $|\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. 于是

$$\{\alpha \in \mathbf{H} \mid |\alpha| = 1\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

是 3 维球面 S^3. 自然在 S^3 中可以定义乘法使其为群. 可将 S^3 与 $\{\alpha \in \mathbf{H} \mid |\alpha| = 1\}$ 等同.

$\mathbf{H}$ 中元素也可以用 2 阶复矩阵表示, 令 $1 = I_2$, $i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$, 则 $a + bi + cj + dk = \begin{pmatrix} a + \sqrt{-1}b & c + \sqrt{-1}d \\ -c + \sqrt{-1}d & a - \sqrt{-1}b \end{pmatrix}$.

例 2.5.3 $SU(2)$ 与 S^3 同构, 且 $Sp(1) = SU(2)$.

事实上, 当 $\alpha = a + bi + cj + dk$, $|\alpha| = 1$ 时, 可直接验证 $\begin{pmatrix} a + \sqrt{-1}b & c + \sqrt{-1}d \\ -c + \sqrt{-1}d & a - \sqrt{-1}b \end{pmatrix} \in SU(2)$.

反之, 若 $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in SU(2)$, 则有

$$\begin{cases} w\bar{w} + x\bar{x} = 1, \\ y\bar{y} + z\bar{z} = 1, \\ w\bar{y} + x\bar{z} = 0, \\ wz - xy = 1. \end{cases}$$

于是 $0 = y(w\bar{y} + x\bar{z}) = w(y\bar{y}) + (xy)\bar{z} = w(1 - z\bar{z}) + (wz - 1)\bar{z} = w - \bar{z}$. 故 $\bar{z} = w = a + \sqrt{-1}b$. 若 $w \neq 0$, 则由 $w\bar{y} + x\bar{z} = 0$, 得 $-\bar{y} = x = c + \sqrt{-1}d$; 若 $w = 0$, 则由 $y\bar{y} = 1, -xy = 1$, 仍有 $-\bar{y} = x = c + \sqrt{-1}d$. 最后, 由 $w\bar{w} + x\bar{x} = 1$, 得 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. 于是 $\alpha = a + bi + cj + dk \in S^3$.

由于 $Sp(1) = U(2) \cap Sp(1, \mathbf{C})$, 而 $A \in Sp(1, \mathbf{C})$, 有 $A = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 于是 $wz - xy = 1 = \det A$, 因此 $Sp(1) = U(2) \cap Sp(1, \mathbf{C}) \subseteq U(2) \cap SL(2, \mathbf{C}) = SU(2)$.

另一方面, 若 $A = \begin{pmatrix} w & x \\ -\bar{x} & \bar{w} \end{pmatrix} \in SU(2)$, 则由直接计算知 $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 于是 $A \in Sp(1)$. 故 $Sp(1) = SU(2)$.

例 2.5.4 有 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的同态映射 φ.

$\mathbf{H}$ 为 4 维实线性空间, $1, i, j, k$ 为基, 于是可定义内积使其为标准正交基, 即若 $\alpha_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $\alpha_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, 则 $(\alpha_1, \alpha_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$. 若将 α_1, α_2 用 2 阶复矩阵表示为 A_1, A_2, 则不难看出 $(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1 \overline{A_2}')$. 对 $\beta \in \mathbf{H}, \beta \neq 0$, 可以得到 $\mathbf{H}$ 的一个可逆线性变换 $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$, $\forall \alpha \in \mathbf{H}$. 若 α, β 对应的 2 阶复矩阵为 A, B, 则 $\mathcal{B}(\alpha)$ 对应的矩阵为 BAB^{-1}.

前面已说明, $|\beta| = 1$ 当且仅当 $B \in SU(2)$, 于是有

$$(\mathcal{B}\alpha_1, \mathcal{B}\alpha_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(BA_1B^{-1}\overline{BA_2B^{-1}}') = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1\overline{A_2}') = (\alpha_1, \alpha_2).$$

因此 $\mathcal{B}$ 为正交变换. 又因为 $B \in SU(2)$, 于是有 $B_1 \in SU(2)$, 使得 $B_1^2 = B$. 因而, 有 β_1 使得 $\beta_1^2 = \beta$, 故 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1^2$, 所以 $\mathcal{B} \in SO(4)$. 注意 $\beta 1 \beta^{-1} = 1$, 于是 $\mathcal{B}$ 在 $1, i, j, k$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi(B) \end{pmatrix} \in SO(4)$. 故 $\varphi(B) \in SO(3)$. φ 是 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的同态.

若 $\beta, \gamma \in \mathbf{H}, |\beta| = |\gamma| = 1$, 且 $\forall \alpha \in \mathbf{H}$, 有 $\beta\alpha\beta^{-1} = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, 则 $|\gamma^{-1}\beta| = 1$, $\gamma^{-1}\beta \in C(\mathbf{H}) = \mathbf{R}$, 因而 $\gamma = \pm\beta$. 于是 $\ker\varphi = \{\pm I_2\}$. 故 φ 不是同构.

$SU(2)$ 的李代数 $su(2)$ 有基: i, j, k, 并有 $[i,j]=2k$, $[i,k]=-2j$, $[j,k]=2i$. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $su(2)$ 的一个非零理想, $\alpha=bi+cj+dk\in\mathfrak{a}$, $bi+cj+dk\neq 0$. 不妨设 $b\neq 0$. 于是 $\beta=[j,\alpha]=-2(bk-di)\in\mathfrak{a}$, $[i,\beta]=4bj\in\mathfrak{a}$, $j\in\mathfrak{a}$, 因此 $\mathfrak{a}=su(2)$. 即 $su(2)$ 是单李代数.

单李代数 $su(2)$ 到 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$ 的同态 $d\varphi\neq 0$, 故 $\ker d\varphi=\{0\}$. 又 $\dim su(2)=\dim so(3)=3$, 故 $d\varphi$ 是同构, 且 $\varphi(SU(2))=SO(3)$.

李代数的同态 (同构) 不能导致李群的同态 (同构), 是因为李代数仅仅是李群的局部性质. 因而从李代数的同态 (同构) 仅能得到李群的 "局部" 同态 (同构). 由此引入下面一些概念和结果.

1) 设 φ 是局部李群 U_1 到局部李群 U_2 上的解析映射, 且满足: 若 $u, v, uv\in U_1$, 则

$$\varphi(uv)=\varphi(u)\varphi(v),$$

则称 φ 是局部李群 U_1 到局部李群 U_2 上的同态.

又若 φ 是解析同胚, 则称 φ 是 U_1 到 U_2 的同构.

2) 设 e_i $(i=1,2)$ 分别为李群 G_i 的单位元素. 如果存在 e_i 在 G_i 中的邻域 U_i 作为局部李群是同态 (同构) 的, 则称李群 G_1 和李群 G_2 **局部同态 (同构)**.

类似地, 可以定义局部李群的局部同态 (同构).

3) 设李群 G_1 的李代数 $\mathfrak{g}_1$ 和李群 G_2 的李代数 $\mathfrak{g}_2$ 同态 (同构), 则李群 G_1 和李群 G_2 局部同态 (同构).

李群到一般线性群的同态, 即所谓李群的表示尤其重要.

定义 2.5.2 李群 G 到 $GL(V)$ 中的同态 ρ, 称为李群 G 的一个**表示**, 记为 (ρ, V), V 叫做**表示空间**, V 的维数称为表示的**维数**.

V 的子空间 V_1 若满足 $\rho(g)V_1=V_1$, $\forall g\in G$, 则称为**不变子空间**. 于是 $\varphi_{V_1}: g\to\varphi(g)|_{V_1}$ 是以 V_1 为表示空间的一个表示 (ρ_{V_1}, V_1), 称为 (ρ, V) 的**子表示**.

定义 $\rho_{V/V_1}: G\to GL(V/V_1)$ 如下: $\rho_{V/V_1}(g)(v+V_1)=\rho(g)v+V_1$, $\forall g\in G$, $v\in V$. 于是 $(\rho_{V/V_1}, V/V_1)$ 也是李群 G 的一个表示, 称为 (ρ, V) 对 (ρ_{V_1}, V_1) 的**商表示**.

很明显, 若 V_1, V_2 是李群 G 的表示 (ρ, V) 的不变子空间, 则 $V_1\cap V_2$, V_1+V_2 也是不变子空间.

定义 2.5.3 G 的表示 (ρ, V) 称为**不可约的**, 如果除 $\{0\}$, V 外, 另无不变子空间, 则称为**可约的**. 李群 G 的表示 (ρ, V) 称为**完全可约的**, 如果对任一不变子空间 V_1 存在不变子空间 V_2, 使得 $V=V_1\dot{+}V_2$. 此时记 $\rho=\rho_{V_1}\dot{+}\rho_{V_2}$, 称 ρ 为子表示 ρ_{V_1} 与 ρ_{V_2} 的**直和**.

定理 2.5.4 设 (ρ, V) 是李群 G 的有有限维表示, 则下述三个条件是等价的:

1) (ρ, V) 完全可约;

2) (ρ, V) 是不可约子表示的直接和;

3) V 是极小不变子空间之和, 即 $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$, 其中每个 V_i 是非零极小不变子空间, (ρ_{V_i}, V_i) 不可约.

证 首先证明李群 G 的完全可约表示 (ρ, V) 的子表示 (ρ_{V_1}, V_1) 是完全可约表示.

事实上, 设 V_0 是 V_1 的不变子空间, 当然也是 V 的不变子空间. 于是有不变子空间 V' 使得 $V = V_0 \dot{+} V'$. 因而 $V' \cap V_1$ 亦为不变子空间. 且 $(V' \cap V_1) \cap V_0 \subseteq V_0 \cap V' = \{0\}$. 而且对任一 $v \in V_1$, 有 $v_0 \in V_0$, $v' \in V'$ 使得 $v = v_0 + v'$. 由 $v \in V_1$, $v_0 \in V_0 \subseteq V_1$, 故 $v' = v - v_0 \in V_1$. 即 $v' \in V' \cap V_1$. 于是有 $V_1 = V_0 \dot{+} (V' \cap V_1)$. 即 (ρ_{V_1}, V_1) 是李群 G 的完全可约表示.

现在来证明定理.

1) $\Longrightarrow$ 2) 设 V_1 是 V 中的非零极小不变子空间, 由 (ρ, V) 完全可约, 故有不变子空间 V_1' 使 $V = V_1 \dot{+} V_1'$. 由上面事实知, $(\rho_{V_1'}, V_1')$ 完全可约. 对表示的维数作归纳, 有 $V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$, V_i 是极小不变子空间, 故 (ρ_{V_i}, V_i) 不可约, 即 ρ 为不可约子表示的直接和.

2) $\Longrightarrow$ 3) 这是显然的.

3) $\Longrightarrow$ 1) 设 V_0 是 V 的任一不变子空间. 令 V_0' 为满足 $V_0' \cap V_0 = \{0\}$ 的极大不变子空间, 于是有 $V_0 + V_0' = V_0 \dot{+} V_0'$. 若 $V \neq V_0 + V_0'$, 则有 $v \in V \setminus (V_0 + V_0')$, 而且有

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s, \quad v_i \in V_i.$$

由于 $v \notin V_0 + V_0'$, 于是有某个 $v_i \notin V_0 + V_0'$, 即 $v_i \notin V_0$, $v_i \notin V_0'$, 因此 $V_i + V_0' \neq V_0'$. 又由 V_i 是极小不变子空间, 因而 $V_i \cap V_0 = V_i \cap V_0' = V_i \cap (V_0 + V_0') = \{0\}$. 因而 $V_i + (V_0 + V_0') = V_i \dot{+} (V_0 + V_0') = V_i \dot{+} V_0 \dot{+} V_0'$. 故 $(V_i + V_0') \cap V_0 = \{0\}$. 这与 V_0' 的极大性矛盾, 故 $V = V_0 \dot{+} V_0'$. 因而 (ρ, V) 完全可约. □

定义 2.5.4 设 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 是李群 G 的两个表示, 如有 V_1 到 V_2 上的线性同构 $\mathcal{A}$ 使得 $\forall g \in G$, $\mathcal{A}\rho_1(g) = \rho_2(g)\mathcal{A}$, $\forall g \in G$, 则称表示 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) **等价**.

定理 2.5.5 设李群 G 有两个不可约表示 $(\rho_i, V_i)(i = 1, 2)$. 若有 V_1 到 V_2 内的非零线性映射 $\mathcal{A}$ 使得 $\mathcal{A}\rho_1(g) = \rho_2(g)\mathcal{A}, \forall g \in G$, 则 $\mathcal{A}$ 为线性同构, 进而 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 等价.

特别地, 当 $(\rho_1, V_1) = (\rho_2, V_2) = (\rho, V)$ 为 G 的不可约复表示 (即 V 为复向量空间), $\mathcal{A}$ 为 V 的线性变换, 且 $\mathcal{A}\rho(g) = \rho(g)\mathcal{A}, \forall g \in G$ 则 $\mathcal{A} = c\,\mathrm{id}_V, c \in \mathbf{C}$.

证 因为 $\mathcal{A} \neq 0$, 故 $\mathcal{A}V_1$ 是 V_2 中非零子空间. 由条件知 $\mathcal{A}V_1$ 是 V_2 中非零不变子空间. 由 (ρ_2, V_2) 不可约知 $\mathcal{A}V_1 = V_2$, 且 $\ker\mathcal{A} \neq V_1$. 对 $v_1 \in \ker\mathcal{A}$, 有

$\mathcal{A}(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)(\mathcal{A}v_1) = 0, \quad \forall g \in G$. 故 $\ker \mathcal{A}$ 为 V_1 的不变子空间, 由 ρ_1 不可约, 故知 $\ker \mathcal{A} = \{0\}$. 因而 $\mathcal{A}$ 是 V_1 到 V_2 的线性同构, 且 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 等价.

在所述的特别情形, 设 c 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征根, 于是

$$(\mathcal{A} - c\,\mathrm{id})\rho(g) = \rho(g)(\mathcal{A} - c\,\mathrm{id}), \quad \forall g \in G.$$

若 $\mathcal{A} - c\,\mathrm{id} \neq 0$, 则 $\mathcal{A} - c\,\mathrm{id}$ 为 V 到 V 的线性同构, 即 V 的满秩变换, 但 $\mathcal{A} - c\,\mathrm{id}$ 是退化的, 故 $\mathcal{A} = c\,\mathrm{id}_V$ 成立. □

要注意李群的同态可导出其李代数的同态; $GL(V)$ 的李代数为 $gl(V)$, 而且此时有 $\exp X = e^X, \forall X \in gl(V)$.

定理 2.5.6　1) 设 (ρ, V) 是连通李群 G 的表示, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数, 则 $(d\rho, V)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的表示, 而且 V_1 是 (ρ, V) 的不变子空间当且仅当 V_1 是 $(d\rho, V)$ 的不变子空间.

2) (ρ, V) 不可约 (完全可约) 当且仅当 $(d\rho, V)$ 不可约 (完全可约).

证　1) 因为 G 连通, 故 G 为 $\{\exp X | X \in \mathfrak{g}\}$ 生成, 由于 ρ 是 G 到 $GL(V)$ 中同态, 故有

$$\rho(\exp tX) = \exp t d\rho(X) = e^{td\rho(X)}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

设 V_1 是 (ρ, V) 的不变子空间, 即 $\rho(g)V_1 \subseteq V_1, \forall g \in G$, 因而 $\rho(\exp tX)V_1 \subseteq V_1$, 即 $e^{td\rho(X)}V_1 \subset V_1$. 注意 V_1 是 V 的闭集, 于是 $\forall v \in V_1$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{t\,d\rho(X)}v\right)\bigg|_{t=0} &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{t\,d\rho(X)}v - e^{0\,d\rho(X)}v}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{t\,d\rho(X)}v - v}{t}\right) = d\rho(X)v \in V_1.\end{aligned}$$

反之, $d\rho(X)V_1 \subseteq V_1$, 则 $e^{d\rho(X)}V_1 \subseteq V_1$. 于是 $\rho(\exp X)V_1 \subseteq V_1$, 即 $(d\rho, V)$ 的不变子空间 V_1 必为 G 的不变子空间.

2) 2) 是 1) 的直接推论. □

定理 2.5.7　设 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 是连通李群 G 的表示, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. 则有下面结果:

1)　对 $g \in G$, 定义 $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$, 则 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 是 G 的表示 (称为 ρ_1, ρ_2 的**张量积**);

2)　$\mathfrak{g}$ 的表示 $(d(\rho_1 \otimes \rho_2), V_1 \otimes V_2)$, 满足

$$d(\rho_1 \otimes \rho_2)(X) = d\rho_1(X) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes d\rho_2(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

证　1)　只要注意

$$\begin{aligned}(\rho_1 \otimes \rho_2)(gh) &= \rho_1(gh) \otimes \rho_2(gh)\\ &= \rho_1(g)\rho_1(h) \otimes \rho_2(g)\rho_2(h) = (\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(\rho_1 \otimes \rho_2)(h),\end{aligned}$$

知结论 1) 成立.

2) 设 $X \in \mathfrak{g}$, 于是 $\exp tX \in G$.

$$d(\rho_1 \otimes \rho_2)(X) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_1 \otimes \rho_2)(\exp tX)\right)\bigg|_{t=0} = d\rho_1(X) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes d\rho_2(X).$$

结论 2) 成立. □

习　　题

1. 证明 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 与实环面 T^n 是局部同构的, 但不是同构的李群.

2. 证明 $SL(2,\mathbf{R})$ 与 $SU(2)$ 不是同构的, 也不是局部同构的李群.

3. 证明 $GL(n,\mathbf{R})$ 与 $U(n)$ 不是同构的, 也不是局部同构的李群.

4. 李群 $G = GL(n,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ 中子集 $\{(A,\alpha)|A \in O(n), \alpha \in \mathbf{R}^n\}$ 是 G 的闭子群, 且同构于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的等距变换群同构.

5. 证明交换李群与李代数的不可约 (复) 表示是 1 维的.

6. 证明李群 $\mathbf{R}$ 的 2 维表示 $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是可约的, 但不是完全可约的表示.

7. 设李群 G 的复表示 (ρ, V) 有分解互不等价的不可约子表示分解 $V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_k$, 又 $\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换满足 $\forall g \in G$, $\mathcal{A}\rho(g) = \rho(g)\mathcal{A}$. 试求 $\mathcal{A}$.

8. 设李群 $G = GL(n,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$. $V = \mathbf{R}^{n+1}$. $(A,\alpha) \in G$, 定义 V 到 V 的映射:

$$\rho(A,\alpha)(x,y,z,w)' = (A(x,y,z)' + w\alpha, w)' \quad \forall (x,y,z,w)' \in V,$$

证明 (ρ, V) 是 G 的可约表示, 但不是完全可约表示.

2.6 李群的覆盖群

定义 2.6.1 设 G_1, G_2 是连通李群, $f: G_1 \to G_2$ 是同态映射, 且 (G_1, f) 是 G_2 的覆盖, 则称 G_1 为 G_2 的**覆盖群**, $\ker f = f^{-1}(e) = \Gamma$ 为覆盖群 (G_1, f) 关于 G_2 的 **Poincaré 群**, $[\Gamma : 1]$ 称为**覆盖重数**.

引理 2.6.1 设 (G_1, f) 是李群 G_2 的覆盖群, 则其 Poincaré 群 $\Gamma = f^{-1}(e)$ 为 G_1 的离散正规子群, 因而 $\Gamma \subseteq C(G_1)$, 且 $f^{-1}(g_2) = \{g \in G_1 | f(g) = g_2\} = g_1\Gamma$, 其中 g_1 是 $f^{-1}(g_2)$ 中任一元素, G_1/Γ 与 G_2 是同构的拓扑群.

证 只要能证明 $\Gamma \subseteq C(G_1)$, 这个引理就成立了. 注意, f 是覆盖映射, 故 Γ 是 G_1 的离散子集, 又 f 是群的同态, 故 Γ 是 G_1 的正规子群, 设 $\gamma \in \Gamma$, 于是

$g \to g\gamma g^{-1}$, $(\gamma \in \Gamma)$ 是连续, 因而 $\{g\gamma g^{-1}|g \in G_1\}$ 是 Γ 的包含 γ 的连通集, 于是 $\{g\gamma g^{-1}|g \in G_1\} = \{\gamma\}$. □

定义 2.6.2　若 (G_1, f_1) 与 (G_2, f_2) 均为李群 G 的覆盖群, 且有 G_1 到 G_2 的同构 φ, 使得 $f_1 = f_2\varphi$, 则称 (G_1, f_1) 与 (G_2, f_2) **等价**.

显然, (G_1, f_1) 与 (G_2, f_2) 是 G 的等价覆盖, 它们的 Poincaré 群同构.

定理 2.6.1　设 G 是一个连通李群, 则在同构意义下存在唯一的连通且单连通李群 $\tilde{G}$, 及 $\tilde{G}$ 到 G 上的覆盖映射 f, 使得 $(\tilde{G}, f)$ 是 G 的覆盖群, $(\tilde{G}, f)$ 称为 G 的**通用覆盖群**.

证　设 $(\tilde{G}, f)$ 是流形 G 的通用覆盖流形, $\Gamma = f^{-1}(e)$. 取定 $e^* \in \Gamma$, 又 a^*, $b^* \in \tilde{G}$. 于是, 在 $\tilde{G}$ 中有连接 e^* 与 a^*, e^* 与 b^* 的道路 γ_1^*, γ_2^*. 因而 $\gamma_1 = f(\gamma_1^*)$, $\gamma_2 = f(\gamma_2^*)$ 是 G 中从 e 到 $a = f(a^*)$, 从 e 到 $b = f(b^*)$ 的道路. $a\gamma_2$ 是 G 中从 a 到 ab 的道路, 于是 G 中道路 γ_1 与道路 $a\gamma_2$ 的道路乘积 $\gamma = \gamma_1(a\gamma_2)$ 是 G 中从 e 到 ab 的道路. 将 γ 提升为 $\tilde{G}$ 中的以 e^* 为起点的道路, 将其终点记为 c^*. 在 $\tilde{G}$ 中定义乘法如下: $a^*b^* = c^*$. 这里需要说明, c^* 不依赖于 γ_1^*, γ_2^* 的选取. 设 ω_1^*, ω_2^* 是 $\tilde{G}$ 中另外的连接 e^* 与 a^*, 连接 e^* 与 b^* 的道路. 于是 ω_1, ω_2 是 G 中连接 e 与 a, 连接 e 与 b 的道路. 而 ω_1, $a\omega_2$ 的道路积 $\omega = \omega_1(a\omega_2)$ 是 G 中从 e 到 ab 的道路. 以 ω^* 记 ω 的提升, 于是由 $\tilde{G}$ 单连通知, γ_i^* 可连续地变到 ω_i^*. 因而 ω_i 可连续地变到 γ_i, 从而 ω 可连续地变为 γ. 由于 ω, γ 的起点、终点相同, ω^*, γ^* 的起点相同, 由拓扑学知, ω^* 与 γ^* 的终点也相同. 故此, 上面定义的 $\tilde{G}$ 的乘法是合理的.

$\tilde{G}$ 中乘法的结合律可由道路乘法的结合性得到. 从定义还可以知道 e^* 为单位元素, $a^{-1}\gamma_1^{-1}$ 是 G 中连接 e 与 a^{-1} 的道路, 它提升为 $\tilde{G}$ 中从 e^* 到 $(a^*)^{-1}$ 的道路, 于是 $a^*(a^*)^{-1} = e^*$, 即 $(a^*)^{-1}$ 为 a^* 的逆元素. 综上所述, $\tilde{G}$ 是一个群. 再从 $f(a^*b^*) = ab = f(a^*)f(b^*)$, 知 f 是 $\tilde{G}$ 到 G 的群同态.

由于 f 是覆盖映射, 于是 $\tilde{G}$ 的群结构对 $\tilde{G}$ 的拓扑结构是局部群. 因此欲证 $\tilde{G}$ 为拓扑群, 只要证 $\tilde{G}$ 的逆运算及乘法是连续的即可. 设 $a^* \in \tilde{G}$, U^* 是 $(a^*)^{-1}$ 的一个邻域. 于是由 f 是连续开映射知 $U = f^{-1}(U^*)$ 是 a^{-1} 的邻域. 因此有 a 的邻域 V 使得 $V^{-1} \subseteq U$. 故有 a^* 的邻域 V^* 满足 $V^* \subseteq f^{-1}(V)$, V^* 与 V 同胚. 从而 $(V^*)^{-1} \subseteq U^*$. 这就证明了逆运算是连续的. 同样可以证明乘法运算是连续的. 故 $\tilde{G}$ 是拓扑群.

注意到 $\tilde{G}$ 不仅是连通的拓扑群, 它同时还是局部李群. 于是有唯一的解析结构使它成为李群.

若 (G_1, f_1) 也是 G 的通用覆盖群. 于是有 $\tilde{G}$ 到 G_1 的同胚映射 f' 使得 $f = f_1f'$. 因此 $f_1f'(e^*) = f(e^*) = e$. 故 $a_1 = f'(e^*) \in f_1^{-1}(e)$. 显然, $L_{a_1^{-1}}f'$ 仍为同胚映射, 且 $L_{a_1^{-1}}f'(e^*) = e_1$. 将 $L_{a_1^{-1}}f'$ 仍记为 f'. 于是

$$f_1 f'(a^*b^*) = f(a^*b^*) = f(a^*)f(b^*) = f_1(f'(a^*))f_1(f'(b^*)) = f_1(f'(a^*)f'(b^*)).$$

因为 f_1 是局部同构, 故在某单位邻域中有 $f'(a^*b^*) = f'(a^*)f'(b^*)$. 再由 $\tilde{G}$, G_1 连通, f' 是一一对应, 故 f' 是李群的同构. □

推论 设 $(\tilde{G}, f)$ 为连通李群 G 的通用覆盖群, 则 df 是 Lie$\tilde{G}$ 到 Lie$G$ 的同构映射.

定理 2.6.2 设 $\tilde{G}$, G 是连通李群, 且 $\tilde{G}$ 是单连通的. 它们的李代数分别为 $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$. ρ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的同构映射. 则存在 $\tilde{G}$ 到 G 的覆盖同态 f 使得 $df = \rho$.

证 因为 ρ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的同构, 所以有 $\tilde{G}, G$ 的单位邻域 U^*, U 及局部李群的同构 f, 使得 $f(U^*) = U$, $df = \rho$. 注意到 $\tilde{G}, G$ 分别由 $\{\exp X^* | X^* \in \tilde{\mathfrak{g}}\}$, $\{\exp X | X \in \mathfrak{g}\}$ 生成, 而 $f(\exp X^*) = \exp df(X^*) = \exp \rho(X^*)$. 故 f 可扩充为 $\tilde{G}$ 到 G 的同态, 而且又是局部同构, 于是 f 为覆盖同态. □

定理 2.6.3 设 G 是一个连通且单连通的李群. Γ_1, Γ_2 是 G 的离散正规子群. 则 G/Γ_1 与 G/Γ_2 同构, 当且仅当存在 G 的自同构 θ 使得 $\theta(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

证 设 π_i 是 G 到 G/Γ_i 的自然同态 (也是覆盖同态). 因为 θ 是 G 的自同构, 于是 $\pi_2\theta$ 是 G 到 G/Γ_2 的同态. 此时有 $g \in \ker \pi_2\theta$ 当且仅当 $\theta(g) \in \Gamma_2$, 当且仅当 $g \in \Gamma_1$. 因而 $\ker \pi_2\theta = \Gamma_1$. 故有 G/Γ_1 到 G/Γ_2 的同构 $\bar{\theta}$ 使得 $\bar{\theta}\pi_1 = \pi_2\theta$. 即 G/Γ_1 与 G/Γ_2 同构.

反之, 设 $\bar{\theta}$ 是 G/Γ_1 到 G/Γ_2 的同构. 设 G, G/Γ_1, G/Γ_2 的李代数分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. 注意到 $d\pi_1$, $d\pi_2$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 的同构, $d\bar{\theta}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的同构. 于是 $(d\pi_2)^{-1}(d\bar{\theta})(d\pi_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 因而, 有 G 的自同构 θ, 使得 $d\theta = (d\pi_2)^{-1}(d\bar{\theta})(d\pi_1)$, 即 $(d\pi_2)(d\theta) = (d\bar{\theta})(d\pi_1)$, 故 $\pi_2\theta = \bar{\theta}\pi_2$, $\theta(\Gamma_1) = \Gamma_2$. □

从上面的讨论我们知道, 连通李群的分类问题归结为两个部分: 一部分是李代数的分类; 另一部分是连通且单连通李群的离散正规子群在此李群的自同构下的分类. 因此, 这里有三个课题: 李代数、李群的离散子群、李群的自同构.

习 题

1. 证明 1 维环面 T 的通用覆盖群为 $\mathbf{R}$.

2. 证明 $SU(2)$ 是单连通李群.

3. 证明 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的通用覆盖群.

4. 设 f 是抽象群 G 到连通李群 G_0 的满同态, 又 $\ker f$ 是有限的. 证明 G 有唯一的李群结构, 使得 f 是李群同态.

2.7　李群的自同构群

定义 2.7.1　设 $\mathfrak{g}$ 是连通李群 G 的李代数. G ($\mathfrak{g}$) 的所有自同构构成的群, 称为 $G(\mathfrak{g})$ 的**自同构群**, 记为 $\mathrm{Aut}G$ ($\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$).

由以前结论易得下面结果.

1)　若 $\rho \in \mathrm{Aut}G$, 则 $d\rho \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 而且 $d\rho_1 = d\rho_2$ 当且仅当 $\rho_1 = \rho_2$, 即 d 是 $\mathrm{Aut}G$ 到 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的一一映射. 于是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g} \supseteq d(\mathrm{Aut}G)$.

2)　设 $(\tilde{G},\ f)$ 是 G 的通用覆盖群, 于是 G 同构于 $\tilde{G}/\Gamma$. 令 $\Theta = \{\tilde{\theta} \in \mathrm{Aut}\tilde{G} | \tilde{\theta}(\Gamma) = \Gamma\}$. 注意, $\forall \tilde{\theta} \in \Theta$, 有唯一的 $\theta \in \mathrm{Aut}G$ 使得 $f\tilde{\theta} = \theta f$. 反之亦然. 于是 $\Theta \cong \mathrm{Aut}G$.

3)

$$GL(\mathfrak{g}) \supseteq \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \supseteq d(\mathrm{Aut}\tilde{G}) \supseteq d\Theta \cong d(\mathrm{Aut}G),$$
$$\mathrm{Aut}\tilde{G} \supseteq \Theta \cong \mathrm{Aut}G.$$

定理 2.7.1　设 $(\tilde{G},\ f)$ 是连通李群 G 的通用覆盖群, $\mathrm{Lie}G = \mathfrak{g}$, Θ 如上述. 则有以下结果:

1)　$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 是李群;

2)　$d(\mathrm{Aut}\tilde{G}) = \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 且 d 为同构映射, 因而 $\mathrm{Aut}\tilde{G}$ 为李群;

3)　Θ 为 $\mathrm{Aut}\tilde{G}$ 的闭子群, 故 Θ, $\mathrm{Aut}G$ 均为李群; $d\Theta$ 为$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的闭子群, 也是李群.

证　1)　在 $\mathfrak{g}$ 中取基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 对应结构常数为 $\{C_{ij}^k\}$. 若 $\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 则 $\sigma(X_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j\,i} X_j$, 且 $\sum\limits_{p,q=1}^{n} a_{p\,i} a_{q\,j} C_{p\,q}^{l} - \sum\limits_{k=1}^{n} C_{i\,j}^{k} a_{l\,k} = 0$. 故 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 为 $GL(\mathfrak{g})$ 的代数群, 故为李群.

2)　设 $\rho \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 由定理 2.6.2 知, 可将 ρ 唯一地扩充为 $\tilde{G}$ 的自同构 $\tilde{\theta}$, 使得 $d\tilde{\theta} = \rho$. 于是 $d(\mathrm{Aut}\tilde{G}) \supseteq \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \supseteq d(\mathrm{Aut}\tilde{G})$. 结论 2) 成立.

3)　设 $\theta_i \in \Theta$, $i = 1,\ 2,\ \cdots$, 且 $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = \theta_0 \in \mathrm{Aut}\tilde{G}$. 又设 $\gamma \in \Gamma$, 于是 $\theta_i(\gamma) \in \Gamma$, $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i(\gamma) = \theta_0(\gamma)$. 因而 $\theta_0(\gamma) \in \overline{\Gamma} = \Gamma$. 故 $\theta_0(\Gamma) \subseteq \Gamma$, 同样 $\theta_0^{-1}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. 因此 $\theta_0(\Gamma) = \Gamma$, $\theta_0 \in \Theta$. Θ 为闭子群, 故为李群, 因而 $\mathrm{Aut}G$ 也是李群.

由于 d 是 $\mathrm{Aut}\tilde{G}$ 到 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的同构映射, Θ 为前者的闭子群, 故 $d\Theta$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的闭子群. □

定义 2.7.2　设 G 为李群, 对 $g \in G$, 由 $\mathrm{ad}g(h) = ghg^{-1}$, $\forall h \in G$ 定义的自同构 $\mathrm{ad}g$, 称为 G 的**内自同构**, G 的所有内自同构构成的群称为 G 的**内自同构群**, 记为$\mathrm{ad}G$.

设 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数, $g \in G$. 于是 $d(\mathrm{ad}g) = \mathrm{Ad}g$ 为 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构**, 由 $\{\mathrm{Ad}g | g \in G\}$ 生成的群 $\mathrm{Ad}G$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构群**.

定义 2.7.3 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数, 其线性变换 D 若满足 $D([x,\ y]) = [Dx,\ y] + [x,\ Dy]$, $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$, 则称 D 为 $\mathfrak{g}$ 的**导子**. 特别地, 对 $x \in \mathfrak{g}$, 由 $\mathrm{ad}x(y) = [x,\ y]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$, 定义的 $\mathrm{ad}x$ 为 $\mathfrak{g}$ 的导子, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子**.

定理 2.7.2 $\mathfrak{g}$ 的所有导子的集合 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是 $gl(\mathfrak{g})$ 的子代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**导子代数**; $\mathfrak{g}$ 的所有内导子的集合 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子代数**.

证 设 $D_1,\ D_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 则容易算出

$$([D_1,\ D_2])([x,\ y]) = (D_1D_2 - D_2D_1)([x,\ y]) = [[D_1,\ D_2]x,\ y] + [x,\ [D_1,\ D_2]y].$$

故 $[D_1,\ D_2] \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 为 $gl(\mathfrak{g})$ 的子代数.

由 Jacobi 等式知, $\mathrm{ad}x$ 为 $\mathfrak{g}$ 的导子, 且易得 $[D,\ \mathrm{ad}x] = \mathrm{ad}Dx, \forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g},\ x \in \mathfrak{g}$. 故 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. □

注 这里的证明与李代数的基域、维数无关, 故可一般化.

定理 2.7.3 设 $\mathfrak{g}$ 为连通李群 G 的李代数, 则李群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的李代数为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

证 设 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 于是 $\exp D \in GL(\mathfrak{g})$. 可归纳证明 $D^k([x,y]) = \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s[D^s x, D^{k-s}y],\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

$k = 0, 1$ 时是显然的. 注意

$$\begin{aligned}
D^{k+1}([x,y]) &= D\left(\sum_{s=0}^{k} C_k^s[D^s x, D^{k-s}y]\right) \\
&= \sum_{s=0}^{k} C_k^s[D^{s+1}x, D^{k-s}y] + \sum_{s=0}^{k} C_k^s[D^s x, D^{k+1-s}y] \\
&= \sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^s[D^s x, D^{k+1-s}y].
\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}
[e^D x, e^D y] &= \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}D^s x,\ \ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}D^l y\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s+l=k} \frac{1}{s!}\frac{1}{l!}[D^s x, D^l y] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+l)!} \sum_{s+l=k} \frac{(s+l)!}{s!l!}[D^s x, D^l y] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}D^k([x,y]) = e^D([x,y]).
\end{aligned}$$

于是 $\exp tD([x, y]) = [\exp tD(x), \exp tD(y)]$. 故 $\exp tD$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 中的单参数子群, 从而 $D \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}\mathfrak{g})$.

反之, $A \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}\mathfrak{g})$. 则 $\exp tA$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的单参数子群, 且 $\exp tA([x, y]) = [\exp tA(x), \exp tA(y)]$. 对 t 求微商, 取 $t = 0$, 则 $A([x, y]) = [Ax, y] + [x, Ay]$, 即 $A \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. □

定理 2.7.4 设 G 为连通李群, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数, $g \in G$, X, $Y \in \mathfrak{g}$. 则有

1) $\exp t(\mathrm{Ad}g)Y = \mathrm{ad}g(\exp tY)$;

2) $\mathrm{Ad}\exp X = e^{\mathrm{ad}X}$;

3) $\mathrm{Ad}G$ 为$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的连通正规李子群, 其李代数为$\mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

证 1) 设 X, $Y \in \mathfrak{g}$, $g \in G$. 于是 $\theta_Y(t) = \exp tY$, $\theta_1(t) = \mathrm{ad}g(\exp tY) = g(\exp tY)g^{-1}$ 均为 G 中单参数子群, $Y = d\theta_Y\left(\frac{d}{dt}\right)$. 而且 $\theta_1(t)$ 对应的 $\mathfrak{g}$ 中元素为 $d\theta_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = d(\mathrm{ad}g)d\theta_Y\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{Ad}g(Y)$. 因此 1) 成立.

2) $\mathrm{Ad}\exp tX$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 中单参数子群, 故有 $B \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 使得 $\mathrm{Ad}\exp tX = \exp tB$, 其中 $B = (d\mathrm{Ad})X$. 又 $\exp(\mathrm{Ad}\exp tX)tY = \exp(tY + t^2[X, Y] + o(t^3))$. 于是 $(\mathrm{Ad}\exp tX)Y = Y + t[X, Y] + o(t^2)$. 因而 $d\,\mathrm{Ad}\exp tX|_{t=0} = \mathrm{ad}X$. 故 2) 成立.

3) 因 G 连通, 故由 $\{\exp X | X \in \mathfrak{g}\}$ 生成. 于是 $\mathrm{ad}\exp X$ 生成 $\mathrm{ad}G$, $\mathrm{Ad}\exp X = e^{\mathrm{ad}X}$ 生成 $\mathrm{Ad}G$. 故 $\mathrm{Ad}G$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的连通李子群, 李代数为 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$, 而且 $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, $\sigma e^{\mathrm{ad}X}\sigma^{-1} = e^{\mathrm{ad}\sigma X}$. 故 3) 成立. □

定理 2.7.5 设 H 为连通李群 G 的连通李子群, 则 H 正规当且仅当 H 的李代数 $\mathfrak{h}$ 为 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证 H 正规, 即 $\mathrm{ad}g(H) = H$, $\forall g \in G$. 于是 $\forall X \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathfrak{h} = (\mathrm{Ad}\exp tX)\mathfrak{h} = e^{\mathrm{ad}tX}\mathfrak{h}$. 故 $\mathrm{ad}X(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

反之, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 故 $\mathrm{ad}X(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathfrak{h} = (\mathrm{Ad}\exp tX)\mathfrak{h} = e^{\mathrm{ad}tX}\mathfrak{h}$. 因 G 连通, 故 $g \in G$, $Y \in \mathfrak{h}$, 有 $\mathrm{Ad}g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}g(\exp Y) = \exp \mathrm{Ad}g(Y) \in H$. 又因 H 连通, 由 $\{\exp Y | Y \in \mathfrak{h}\}$ 生成, 于是 $\mathrm{ad}g(H) = H$, 即 H 为 G 的正规子群. □

注 1 设 $\mathfrak{g}$ 为连通李群 G 的李代数. 从上面讨论得到 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ 是 G 的表示, 称为 G 的**伴随表示**, $(d\mathrm{Ad}, \mathfrak{g}) = (\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的表示, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

注 2 一般说来, $\mathrm{Ad}G$ 不一定是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的闭子群.

习 题

1. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 维交换李代数, 试求 $\mathfrak{a}$ 的自同构群及其李代数.

2. 设 $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{R}, a>0\right\}$. 求 G 的李代数、G 的自同构群及其李代数.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数, $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 为其导子代数. 在线性空间 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\dot{+}\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 中定义换位运算为: $[x_1+D_1,x_2+D_2]=[x_1,x_2]+D_1(x_2)-D_1(x_2)+[D_1,D_2]$, 其中等式右边的 $[x_1,x_2]$, $[D_1,D_2]$ 分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的换位运算. 证明 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 是李代数 (称为 $\mathfrak{g}$ 的全形).

4. 设 G 是一个抽象群, $\mathrm{Aut}G$ 为其自同构群. 在 $H(G)=\{g\varphi|g\in G,\varphi\in \mathrm{Aut}G\}$ 中定义乘法为: $g_1\varphi_1 g_2\varphi_2=g_1\varphi_1(g_2)\varphi_1\varphi_2$, $g_i\in G$, $\varphi_i\in\mathrm{Aut}G$. 证明 $H(G)$ 是一个群; G 与 $H(G)$ 的一个正规子群同构; $\mathrm{Aut}G$ 与 $H(G)$ 的一个子群同构.

5. G 是连通李群, $H(G)$ 如习题3, 问在 $H(G)$ 上能否建立解析结构, 使其为李群? 如果能, $H(G)$ 的李代数是什么?

2.8 齐性空间

定义 2.8.1 设 G 是一个李群, M 是一个微分 (解析) 流形. 如果有 $G\times M$ 到 M 上的可微映射 $\mathcal{B}(g,\ p)=gp$, 满足

1) $e(x)=x$, $(g_1g_2)(x)=g_1(g_2(x))$, e 是 G 的单位元, $\forall g_1,g_2\in G$, $x\in M$;

2) $g\in G$ 是 M 的微分自同胚;

则称 G **作用在** M **上**, 或 G 是 M 的**李变换群**. 称 G 在 M 上的作用是**有效的**, 如果 $g(x)=x,\forall x\in M$, 则 $g=e$. 又若 G 在 M 上的作用是**可递的** (即 $\forall x,y\in M$, 有 $g\in G$, 使得 $g(x)=y$), 则称 M 是**齐性空间**. 设 G 作用在 M 上, $p\in M$. 分别称 $\mathcal{O}_p=\{g(p)|g\in G\}$, $G_p=\{g\in G|g(p)=p\}$ 为 p 的**轨道**、**迷向子群**.

易得以下结果:

1) 若 $p,q\in M$, 则 $\mathcal{O}_p\cap\mathcal{O}_q=\varnothing$ 或 $\mathcal{O}_p=\mathcal{O}_q$;

2) $M=\bigcup\limits_{p\in M}\mathcal{O}_p$;

3) 若 G 在 M 上作用可递, 即 $M=\mathcal{O}_p,\forall p\in M$;

4) $G_{g(p)}=gG_pg^{-1}$, $\forall g\in G,p\in M$.

例 2.8.1 1) 设 $G=GL(n,\mathbf{R})$, $M=\mathbf{R}^n$ 为线性空间. $v,u\in M$, $v\neq 0,u\neq 0$ 则有 $A\in G$ 使得 $A(v)=u$. 于是 $\mathcal{O}_v=\mathcal{O}_u=\{w\in M|w\neq 0\}$, 这是 M 的开集. $\mathcal{O}_0=\{0\}$, 是 M 的闭集. 令 $e_1=(1,0,\cdots,0)'$, 则 $G_{e_1}=\{A\in G|\mathrm{col}_1A=e_1\}$.

2) 设 $G=SO(n,\mathbf{R})$, $M=\mathbf{R}^n$ 为 Euclid 空间. 则有 $A\in G$ 使得 $A(v)=u$, 当且仅当 $|u|=|v|$. 此时, $\mathcal{O}_v=\mathcal{O}_u=\{w\in M\,|\,|w|=|u|=|v|\}=S^{n-1}_{|v|}$ 是以 $|v|$ 为半径的球面, 且是 M 的闭集. 此时, $M=\bigcup\limits_{r\geqslant 0}S^{n-1}_r$. $r>0$ 时, 有 $G_{re_1}=\{A\in$

$G|\mathrm{col}_1 A = e_1\}$.

3) 设 $G = GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$, $M = \mathbf{R}^n$, $(A, \alpha) \in G$, $\beta \in M$. 定义: $(A, \alpha)(\beta) = A(\beta) + \alpha$, $\forall (A, \alpha) \in G, \beta \in M$. 则 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的李变换群, $\mathbf{R}^n$ 是齐性空间, G 的作用是有效的.

定理 2.8.1 设 G 是微分流形 M 上的李变换群, $p \in M$.

1) p 的迷向子群 G_p 是 G 的闭子群, 因而是 G 的李子群;

2) 记 $\mathcal{B}_p(g) = gp$. $\mathcal{B}_p$ 是 G 到 M 的映射, 故 $d\mathcal{B}_p$ 将 $T_e(G)$ 映到 $T_p(M)$. 特别有, $(d\mathcal{B}_p)_e^{-1}(0) = T_e(G_p)$;

3) 若 G 有效可递地作用于 M, 设 $\mathfrak{g}_1$ 为 G 的右不变向量场构成的李代数 (与 G 的李代数反同构), 则 $\mathfrak{g}_1$ 与 $d\mathcal{B}_p(\mathfrak{g}_1)$ 同构.

证 1) 显然 G_p 是 G 的子群, 若 G 中序列 $\{g_n\}$ 收敛于 g, 则 M 中序列 $\{g_n p\}$ 收敛于 gp. 又若 $g_n \in G_p$, 则 $g_n p = p$, 故 $gp = p$, 从而 $g \in G_p$, 即 G_p 为 G 的闭子群, 因而为李子群.

2) 记 $T_e(G) = \mathfrak{g}$, $T_e(G_p) = \mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}$ 中元素 $X \in \mathfrak{h}$ 的充分必要条件是 $\exp tX \in G_p$, 即 $\exp tX \cdot p = p$. 考虑 M 中曲线 $\theta_X(t) = \exp tX \cdot p$, 于是 $d\theta_X\left(\dfrac{d}{dt}\right) = d\mathcal{B}_p d\exp_X\left(\dfrac{d}{dt}\right) = d\mathcal{B}_p(X) = 0$ 当且仅当 $\exp tX \cdot p = p$, 即 $X \in \mathfrak{h}$. 故 2) 成立.

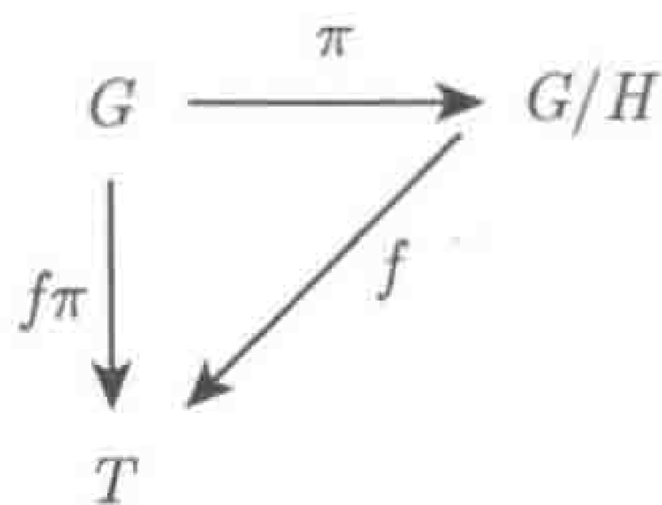
3) 由 $\mathcal{B}_{gp}(g_1) = g_1 gp = \mathcal{B}_p(g_1 g) = \mathcal{B}_p R_g(g_1)$, 得 $\mathcal{B}_{gp} = \mathcal{B}_p R_g$. 故有 $d\mathcal{B}_{gp} = d\mathcal{B}_p dR_g$. 设 $X \in \mathfrak{g}_1$, 且 $d\mathcal{B}_p(X) = 0$, 则有 $d\mathcal{B}_p(X_{g_1}) = d\mathcal{B}_p dR_{g_1}(X_e) = d\mathcal{B}_{g_1 p}(X_e) = 0$. 因 $\forall g_1 \in G$ 有 $X_e \in T_e(G_{g_1 p})$, 故 $\exp tX_e \in G_{g_1 p}$. 即 $\exp tX_e(g_1 p) = g_1 p$, $\forall g_1 p \in M$. 由 G 在 M 上作用可递, 知 $\forall p_1 \in M$, $\exp tX_e(p_1) = p_1$. 另一方面, G 在 M 上作用有效, 故 $\exp tX_e = e$. 因而 $X_e = 0$, 于是 $X_{g_1} = dR_{g_1}(X_e) = 0$. 故 $d\mathcal{B}_p(\mathfrak{g}_1) \cong \mathfrak{g}_1$. □

注 $d\mathcal{B}_p(\mathfrak{g}_1)$ 中元素称为 M 上的**无穷小变换**.

引理 2.8.1 设 H 是拓扑群 G 的任一子群. 则在左陪集空间 G/H 中可引进唯一的拓扑, 使得

1) G 到 G/H 的自然映射 $\pi(g) = gH$ $(g \in G)$ 是连续的;

2) 若 f 是 G/H 到任一拓扑空间 T 的映射, 且 $f\pi$ 连续, 则 f 连续;



又若 H 是 G 的闭子群, 则对上述拓扑 G/H 是 Hausdorff 空间.

证 在 G/H 中定义拓扑为: G/H 中子集 K 称为开集, 如果 $\pi^{-1}(K)$ 为 G 的开集. 先证明此定义的合理性. 由 $\bigcup\limits_\alpha \pi^{-1}(K_\alpha) = \pi^{-1}\left(\bigcup\limits_\alpha K_\alpha\right)$, $\bigcap\limits_\alpha \pi^{-1}(K_\alpha) =$

$\pi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} K_\alpha\right)$, 因而这样定义的开集满足开集公理. 又若 K 为 G/K 的开集, 则 $\pi^{-1}(K)$ 为 G 的开集, 故 π 连续.

设 f 是 G/H 到拓扑空间 T 的映射, 且 $f\pi$ 连续, 即对 T 中任一开集 O, $(f\pi)^{-1}(O)$ 是 G 的开集, 即 $\pi^{-1}(f^{-1}(O))$ 是 G 的开集. 因此 $f^{-1}(O)$ 是 G/H 的开集. 故 f 连续.

若 G/H 上有两种拓扑 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 均满足 1), 2). 考虑 G/H 的恒等映射 id. 于是由 $\pi\mathrm{id} = \pi$ 连续, 知 id 连续, $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$ 亦连续. 故 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 相同. 即 G/H 上满足 1), 2) 的拓扑是唯一的.

又若 H 是 G 的闭子群. 设 $x, y \in G, xH \neq yH$. 于是 $x \notin yH$. 由 H 闭, 知 yH 亦闭, 于是有 e 的邻域 U 使得 $Ux \cap yH = \varnothing$. 还有 e 的邻域 W 使得 $W^{-1}W \subset U$. 若 $WxH \cap WyH \neq \varnothing$, 则有 $w_1, w_2 \in W, h_1, h_2 \in H$ 使得 $w_1xh_1 = w_2yh_2$. 故 $w_2^{-1}w_1x = yh_2h_1^{-1} \in yH$. 但是, $W^{-1}Wx \subset Ux$, 矛盾. 故 $WxH \cap WyH = \varnothing$. 因而, $\pi(WxH) \cap \pi(WyH) = \varnothing$. 而 $\pi(WxH), \pi(WyH)$ 为 G/H 的开集, 故 G/H 是 Hausdorff 空间. □

称 G/H 的这种拓扑为 G 诱导的拓扑, G/H 也称为商空间. 不作声明, G/H 上的拓扑均指诱导拓扑.

推论 G 到 G/H 的自然映射 π 是开映射.

事实上, 设 V 为 G 中一开集, 则由 $\pi^{-1}(\pi(V)) = VH = \bigcup_{h\in H} Vh$, 知 $\pi^{-1}(\pi(V))$ 是 G 的开集, 于是, $\pi(V)$ 是 G/H 的开集. 故 π 是开映射. □

定理 2.8.2 *设 H 是李群 G 的闭子群. 则在 G/H 上可建立解析结构, 使其为解析流形. 设 π: $G \to G/H$ 为自然映射. 又 $\forall x \in G$, G/H 到 G/H 的映射 A_x: $A_x(\pi(y)) = \pi(xy), \forall y \in G$ 是解析同胚, 且 G 是 G/H 的李变换群.*

证 设 G 与 H 的李代数分别为 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 都将它们看作 e 点的切空间, 又设 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间, 即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$. 将指数映射 exp 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制记为 ψ 即 $\psi = \exp|_{\mathfrak{m}}$. 设 $p_0 = \pi(e)$.

首先, 我们证明有 0 在 $\mathfrak{m}$ 中的邻域 U 使得 $\pi(\psi(U))$ 是 p_0 在 G/H 中的邻域, 且 $\pi: \psi(U) \to \pi(\psi(U))$ 是同胚映射.

取 $U_{\mathfrak{m}}, U_{\mathfrak{h}}$ 分别为 0 在 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathfrak{h}$ 中的邻域, 使 $\exp U_{\mathfrak{m}} \exp U_{\mathfrak{h}}$ 是 e 在 G 中的邻域, 且 $X + Y \to \exp X \exp Y (X \in U_{\mathfrak{m}}, Y \in U_{\mathfrak{h}})$ 是 $U_{\mathfrak{m}} \times U_{\mathfrak{h}}$ 到 $\exp U_{\mathfrak{m}} \exp U_{\mathfrak{h}}$ 上的解析同胚. 因为 H 是闭子群, 故 H 的拓扑为诱导拓扑, 故有 e 在 G 中邻域 V 使得 $\exp U_{\mathfrak{h}} = V \cap H$. 设有 0 在 $\mathfrak{m}$ 中紧邻域 U, 使得 $0 \in U \subset U_{\mathfrak{m}}$, 且 $\exp(-U)\exp U \subset V$. 从 $\psi: U \to \psi(U)$ 是同胚映射, 可证 π 在 $\psi(U)$ 上也是同胚. 设 $X', X'' \in U$, 而 $\pi(\exp X') = \pi(\exp X'')$, 故 $\exp(-X'')\exp(X') \in V \cap H$. 因而有 $Z \in U_{\mathfrak{h}}$ 使得 $\exp X' = \exp X'' \exp Z$. 但 $X + Y \to \exp X \exp Y$ 在 $U_{\mathfrak{m}} \times U_{\mathfrak{h}}$ 上是一

一的, 故 $X' = X''$, $Z = 0$. 从而 π 在 $\psi(U)$ 上是一一的, 而 π 是连续开映射, 故 π 在 $\psi(U)$ 上是同胚映射, 即 $\pi(\psi(U)) = \pi(\exp U \exp U_{\mathfrak{h}})$ 是 p_0 在 G/H 中的一个邻域 ($\psi(U)$ 称为一个**局部截面**).

其次, 我们在 G/H 上建立解析结构.

令 $N_0 = \pi(\psi(U))$. $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{m}$ 的基. 对 $g \in G$, 映射 φ: $\pi\left(g \exp \sum\limits_{i=1}^{r} x_i X_i\right) \longrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 是 gN_0 到 $\mathbf{R}^r$ 中开子集的同胚. 设有 $p = g \exp \sum\limits_{i=1}^{r} x_i X_i = g_1 \sum\limits_{i=1}^{r} y_i X_i$. 故 $g_1^{-1} g \exp \sum\limits_{i=1}^{r} x_i X_i = \sum\limits_{i=1}^{r} y_i X_i$. 即 $g_1^{-1} g \in H$, $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 对 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 解析. 同理, $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 对 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 解析. 因而 G/H 是一个解析流形.

最后, 证明 G 是 G/H 上的李变换群.

显然, 对 $x \in G$, A_x 是 G/H 的解析自同胚. 现证 $\mathcal{B}$: $(g, \pi(x)) \to \pi(gx)$ 是解析的.

令 $B = \psi(\mathring{U})$, 其中 $\mathring{U}$ 为 U 的内点集, 又设 Φ: $(x. y) \to xy$. 于是, B 是 G 的子流形, 而且有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{id}_G \times \pi(g, x) = (g, \pi(x)),\\
&\Phi(g, x) = gx,\\
&\mathcal{B}(g, \pi(x)) = \pi(gx).
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
G \times B & \xrightarrow{\Phi} & G \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G \times \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\
G \times N_0 & \xrightarrow{\mathcal{B}} & G/H
\end{array}$$

故在 $G \times N_0$ 上有 $\mathcal{B} = \pi \cdot \Phi \cdot (\mathrm{id}_G \times \pi)^{-1}$, 即右上图交换. 注意到 $(\mathrm{id}_G \times \pi)^{-1}$, Φ, π 解析, 因而 $\mathcal{B}$ 解析. 于是 G 是 G/H 上的李变换群. □

定理 2.8.3　设 G 是流形 M 上可递李变换群. G_{p_0} 是 $p_0 \in M$ 的迷向子群. 又设 α 是 G/G_{p_0} 到 M 的映射: $\alpha(gG_{p_0}) = gp_0$. 则有

1) 若 α 是同胚映射, 则是微分同胚;

2) 若 α 是同胚, M 是连通流形, 则 G 的单位连通分支 G_0 在 M 上作用可递.

证　1) 设 π 是 G 到 G/G_{p_0} 上的自然映射. G, G_{p_0} 的李代数分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$. 又 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间. ψ 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射 exp 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制. 在定理 2.8.2 中我们已经证明, 存在 0 在 $\mathfrak{m}$ 中的邻域 U 使得 π 是 $\psi(U)$ 到 $\pi(\psi(U))$ 上的同胚映射. 记 $N_0 = \pi(\psi(U))$, $B = \psi(U)$. 再作 G 到 M 上的映射 $\mathcal{B}_{p_0}$, 即: $\mathcal{B}_{p_0}(g) = gp_0$, $\forall g \in G$. 于是, 有 $\alpha|_{N_0} = \mathcal{B}_{p_0} \,\mathrm{id}\, \pi^{-1}$. 自然, $\alpha|_{N_0}$ 是可微映射. 而 $\alpha|_{N_0}^{-1} = \pi \,\mathrm{id}\, \mathcal{B}_{p_0}^{-1}|_{\alpha(N_0)}$.

要证明 $\alpha|_{N_0}^{-1}$ 是可微的, 只要证明 $\mathcal{B}_{p_0}$ 的 Jacobi 的秩为 $\dim M$. 由于 $d\mathcal{B}_{p_0}(X) = 0$ 当且仅当 $X \in \mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h} = \ker d\mathcal{B}_{p_0}$. 于是 $\mathcal{B}_{p_0}$ 的 Jacobi 秩为 $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$. 又 α 是同胚映射, 故 G/G_{p_0} 与 M 的维数相同 (维数是拓扑不变量), 从而 $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} =$

$\dim M$. 于是, α 是微分同胚映射.

2) α 是同胚映射, $\mathcal{B}_{p_0}$ 如上所述, 则 $\mathcal{B}_{p_0}$ 是开映射. 于是有 G 中子集 $\{x_\gamma|\gamma \in \mathbf{N}\}$ 使得 $G = \bigcup\limits_{\gamma\in\mathbf{N}} G_0x_\gamma$. 于是 $G_0x_\gamma p_0$ 是 M 的开集. 另一方面, 有 $G_0x_\gamma p_0 = Gx_{\gamma'}p_0$ 或 $G_0x_\gamma p_0 \cap Gx_{\gamma'}p_0 = \varnothing$. 由 M 连通, 因而 $G_0x_\gamma p_0 = Gx_{\gamma'}p_0$. 于是 $M = \bigcup\limits_{\gamma\in\mathbf{N}} G_0x_\gamma p_0 = G_0p_0$. G_0 在 M 上的作用可递. □

推论 设 H 是李群 G 的闭子群, 则可在 G/H 上定义唯一的解析结构使得 G 是 G/H 上的李变换群.

事实上, 若 G/H 上另有解析结构, 使 G 为其上的李变换群, 显然 id: $G/H \to G/H$ 是同胚映射, 故由定理 2.8.3 知, G/H 上这两种解析结构相同. □

例 2.8.2 1) $G = GL(n,\mathbf{R})$, $M = \mathbf{R}^n$ 为线性空间. $e_1 = (1,0,\cdots,0)'$, $G_{e_1} = \{A \in G|\mathrm{col}_1 A = e_1\}$. 则 $BG_{e_1} = CG_{e_1}$ 当且仅当 $\mathrm{col}_1 B = \mathrm{col}_1 C$. $\alpha(BG_{e_1}) = B(e_1) = \mathrm{col}_1 B$, $\forall B \in G$.

2) $G = SO(n,\mathbf{R})$, $M = \mathbf{R}^n$ 为 Euclid 空间. $G_{re_1} = \{A \in G|\mathrm{col}_1 A = e_1\}$. 则 $BG_{e_1} = CG_{e_1}$ 当且仅当 $\mathrm{col}_1 B = \mathrm{col}_1 C$. $\alpha(BG_{e_1}) = B(re_1) = r\mathrm{col}_1 B$, $\forall B \in G$.

3) 设 G 是连通李群. τ 是 G 的**对合自同构**(即阶为 2 的自同构). 令 $G_\tau = \{g \in G|\tau(g) = g\}$. 设 $g_0 \in \overline{G_\tau}$, 于是有 $g_n \in G_\tau$, 使得 $g_0 = \lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tau(g_n) = \tau(\lim\limits_{n\to\infty} g_n) = \tau(g_0)$. 故 G_τ 是 G 的闭子群, G/G_τ 是齐性空间.

这时, $d\tau$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. 于是 $\mathfrak{g} = E_1(d\tau)\dot{+}E_{-1}(d\tau)$. 注意到 $\tau(\exp tX) = \exp t(d\tau(X)$. 于是 ($E_1(d\tau)$ 恰为 G_0 的李代数) $E_{-1}(d\tau)$ 是 G/G_0 在 $\pi(e) = G_0$ 处的切空间.

4) 设 G 是连通李群, G 的李代数为 $\mathfrak{g}$. 则 $G \otimes G = \{(g_1,g_2)|g_1,g_2 \in G\}$ 对于乘法

$$(g_1,g_2)(h_1,h_2) = (g_1h_1, g_2h_2), \quad \forall (g_1,g_2),(h_1,h_2) \in G\otimes G$$

是李群, 而且是连通的. $G\otimes G$ 的李代数为 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} = \{(X_1,X_2)|X_1,X_2 \in \mathfrak{g}\} \cong \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$.

由 $\tau(g_1,g_2) = (g_2,g_1)$ 所定义的 τ 是 G 的对合自同构, $(G\otimes G)_\tau \cong G$ 称为 $G\otimes G$ 的**对角子群**, 记为 ΔG. 作为流形 G 与 $G\otimes G/\Delta G$ 是微分同胚的. 于是 G 也是齐性空间.

这时, 易知 $E_1(\tau) = \{(X,X)|X \in \mathfrak{g}\} \cong \mathfrak{g}$, $\quad E_{-1}(\tau) = \{(X,-X)|X \in \mathfrak{g}\}$. 作为线性空间, $E_{\pm 1}(\tau)$ 都与 $\mathfrak{g}$ 同构.

习 题

1. 设 $G = SO(n,\mathbf{R})$, $I_{p,q} = \mathrm{diag}(-I_p, I_q), p+q=n$.

   1) 证明由 $\tau(A) = I_{p,q}AI_{p,q}$ 所定义的 τ 是 G 的对合自同构;

2) 求 $G_\tau=\{g\in G|\tau(g)=g\}$, 并证明 G_τ 有两个连通分支;

3) 以 G_0 表示其单位连通分支, 给 G/G_τ, G/G_0 以几何解释;

4) 给出 G 的李代数相应的分解.

2. 设 $G=SU(n)$, $I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p,I_q), p+q=n$.

1) 证明由 $\tau(A)=I_{p,q}AI_{p,q}$ 所定义的 τ 是 G 的对合自同构;

2) 求 $G_\tau=\{g\in G|\tau(g)=g\}$;

3) 给 G/G_τ 以几何解释;

4) 给出 G 的李代数相应的分解.

3. 设 $G=SO(p,q,\mathbf{R})$, $I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p,I_q), p+q=n$.

1) 证明由 $\tau(A)=I_{p,q}AI_{p,q}$ 所定义的 τ 是 G 的对合自同构;

2) 求 $G_\tau=\{g\in G|\tau(g)=g\}$;

3) 给 G/G_τ, G/G_0 以几何解释;

4) 给出 G 的李代数相应的分解.

2.9 商　　群

定理 2.9.1　*设 H 是李群 G 的闭正规子群, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 分别为 G, H 的李代数. 则 G/H 上有解析结构使 G/H 是李群, 而且 G/H 的李代数同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

证　在定理 2.8.2 中, 知 G/H 上有唯一的解析结构使 G 是 G/H 上的李变换群. 设 π 是 G 到 G/H 上的自然映射, 则 $\mathcal{B}(g,\ \pi(x))=\pi(gx)$ 是 $G\times G/H$ 到 G/H 上的解析映射. 在定理 2.8.2 中我们已证明有局部截面 $\psi(U)$ 与 $\pi(\psi(U)$ 解析同胚. 考虑映射

$$\Phi(g,\ \pi(x))=\pi(g^{-1}x),$$
$$\pi\times\mathrm{id}(g,\ \pi(x))=(\pi(g),\ \pi(x)),$$
$$\alpha(\pi(g),\ \pi(x))=\pi(g^{-1}x).$$

于是 $\Phi=\alpha\cdot(\pi\times\mathrm{id})$.

$G\times G/H \xrightarrow{\ \Phi\ } G/H$

$\pi\times\mathrm{id}\downarrow \qquad \nearrow \alpha$

$G/H\times G/H$

设 g_0, x_0 是 G 中任意两点, 将 $\pi\times\mathrm{id}$ 限制在 $g_0\psi(U)\times G/H$ 上, 则 $\pi\times\mathrm{id}$ 是 $g_0\psi(U)\times G/H$ 到 $(\pi(g_0),\ \pi(x_0))$ 在 $G/H\times G/H$ 中一个邻域 N 的解析同胚. 且在 N 上, 有 $\alpha=\Phi\cdot(\pi\times\mathrm{id})^{-1}$, 故 α 解析, G/H 为李群.

由于 π 是 G 到 G/H 上开同态, 故有 $d\pi$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 G/H 的李代数上的同态, 而 $\ker(d\pi)=\{X\in\mathfrak{g}|\exp tX\subseteq H\}=\mathfrak{h}$. 故 G/H 的李代数同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.　□

之后, 我们就将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 看成 G/H 的李代数.

定理 2.9.2(同态基本定理)　*设 θ 是李群 G_1 到李群 G_2 上的同态, 则 $\theta^{-1}(e_2)$ 是 G_1 的闭正规子群. 又设 π 为 G_1 到 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 的自然同态, 则有 φ 使得 $\theta=\varphi\pi$.*

证　显然, $\theta^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的闭正规子群, 故 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 为李群.

设 $\theta^{-1}(e_2)$ 的李代数为 $\mathfrak{h}_1$, G_1 的李代数为 $\mathfrak{g}_1$. 则 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想. 将 $\mathfrak{h}_1$ 的一组基 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 扩充为 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基 $X_1, X_2, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n$. 于是, 关于这组基的第三类标准坐标系 $\exp\left(\sum\limits_{j=r+1}^{n} x_j X_j\right) \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i X_i\right)$ 诱导了 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 上的第一类坐标系. G_2 的李代数 $\mathfrak{g}_2$ 有基 $d\theta(X_{r+1}), \cdots, d\theta(X_n)$. 关于此基的第一类坐标系为 $\exp\left(\sum\limits_{j=r+1}^{n} x_j d\theta(Xj)\right)$, 而 $d\theta(X_j) = d\varphi(X_j + \mathfrak{h}_1)$, 故 φ 是李群的同构. □

推论　设 G_0 是李群 G 的单位连通分支, 则 G/G_0 是离散群.

定理 2.9.3　记 $T^m = \underbrace{\mathbf{R}/\mathbf{Z} \otimes \mathbf{R}/\mathbf{Z} \otimes \cdots \otimes \mathbf{R}/\mathbf{Z}}_{m}$, 则 n 维连通交换李群 (或复李群) $G \cong \mathbf{R}^k \otimes T^{n-k}$. (对复李群, 只要将 $\mathbf{R}$ 改为 $\mathbf{C}$ 即可!)

证　设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$, 由 G 可换, 故 $\forall g \in G$, $\mathrm{Ad}g$ =id. 于是 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $(\mathrm{Ad}\exp(tX))Y = Y$. 因而 $e^{\mathrm{ad}tX}$ =id, 故 $\mathrm{ad}X = 0$. $\mathfrak{g}$ 为交换李代数.

反之, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, 则 $\exp X$ 与 $\exp Y$ 可换, 而 G 由 $\exp\mathfrak{g}$ 生成, 故 G 交换.

因此 G 交换, 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 交换.

$\mathbf{R}^n$ 作为李群是连通而且单连通的, 其李代数仍为 $\mathbf{R}^n$, 故为 G 的通用覆盖群. 于是 $G \cong \mathbf{R}^n/\Gamma$, 这里 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的离散闭子群.

下面证明 $\Gamma \neq \{0\}$ 时, $\Gamma = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n-k} n_i\alpha_i \middle| \forall n_i \in \mathbf{Z}\right\}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-k}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中线性无关组.

对 n 作归纳. $n = 1$, 取 $\alpha_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$, 使得

$$|\alpha_1| = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in \Gamma \setminus \{0\}\}.$$

显然 $\{n\alpha_1 | n \in \mathbf{Z}\} \subseteq \Gamma$. 若有 $\alpha_0 \in \Gamma$, 则

$$\alpha_0 = \lambda\alpha_1 = [\lambda]\alpha_1 + \mu\alpha_1,$$

$\lambda \in \mathbf{R}$, $[\lambda]$ 表示 λ 的整数部分. 故 $|\mu| = |\lambda - [\lambda]| < 1$. 于是有 $\mu\alpha_1 = \alpha_0 - [\lambda]\alpha_1 \in \Gamma$, 而 $|\mu\alpha_1| = |\mu|\,|\alpha_1| < |\alpha_1|$, 故 $\mu = 0$. 因此 $\alpha_0 \in \{n\alpha_1 | n \in \mathbf{Z}\}$. 从而 $\Gamma = \{n\alpha_1 | n \in \mathbf{Z}\}$.

设 $n-1$ 时, $\Gamma = \left\{\sum\limits_{i=1}^{l} n_i\alpha_i\right\}$. 现证 n 时也成立. 取 $\alpha_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$, 使 $|\alpha_1| = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in \Gamma \setminus \{0\}\}$. 令 $L_1 = \{\lambda\alpha_1 | \lambda \in \mathbf{R}\}$. 故 $\dim \mathbf{R}^n/L_1 = n-1$. 设 π 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n/L_1$ 的自然映射, 故 $\pi(\Gamma)$ 为 $\mathbf{R}^n/L_1$ 中的离散子群.

若 $\pi(\Gamma)=\{0\}$, 则 $\Gamma\subset L_1$. 此时 $\Gamma=\{n\alpha_1|n\in\mathbf{Z}\}$; 若 $\pi(\Gamma)\neq\{0\}$, 则有 $\mathbf{R}^n/L_1$ 中线性无关向量组 $\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_l$ 使得 $\pi(\Gamma)=\left\{\sum\limits_{i=2}^{l}n_i\tilde{\alpha}_i\middle| n_i\in\mathbf{Z}\right\}$. 在 Γ 中取 α_i, 使得 $\tilde{\alpha}_i=\pi(\alpha_i)$, 则有

$$\Gamma=\left\{\lambda\alpha_1+\sum_{i=2}^{l}n_i\alpha_i\right\},\quad \Gamma\cap L_1=\{\lambda\alpha_1\}=\{n_1\alpha_1|n_1\in\mathbf{Z}\}.$$

故 $\Gamma=\left\{\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\alpha_i\right\}$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 线性无关, 将其扩充为 $\mathbf{R}^n$ 的基, 则知定理成立. □

推论　设 G 是 1 维连通李群, X 是其李代数中非零元素.

若 G 非紧, 则 $G=\exp tX=\mathbf{R}$; 若 G 紧, 则 $G=\exp tX=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

定理 2.9.4　*设 G 是连通且单连通李群, 则其连通正规子群 H 为闭子群.*

证　设 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 分别为 G,H 的李代数. 因为 H 为正规子群, 故 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 π 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的自然同态. G_1 是以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为李代数的连通李群, 由 G 单连通, 故有 G 到 G_1 上的同态 θ, 使得 $d\theta=\pi$. 故 $\theta^{-1}(e_1)$ 为 G 的闭正规子群, 又 $\theta^{-1}(e_1)$ 的李代数也为 $\mathfrak{h}$. 由 G 的连通子群与 $\mathfrak{g}$ 的子代数间有一一对应关系, 故 H 为 $\theta^{-1}(e_1)$ 的单位连通分支, 故为 G 的闭子群. □

定理 2.9.5　*设 G 为连通李群, 李代数为 $\mathfrak{g}$. 则有*

1)　*G 的换位子群 $G^{(1)}$ 是连通闭正规子群. 且 $G^{(1)}$ 的李代数是 $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$;*

2)　*$G/G^{(1)}$ 是交换李群;*

3)　*若 H 是 G 的闭正规子群, G/H 交换, 则 $H\subseteq G^{(1)}$.*

证　若 1) 成立, 则从群论知 2), 3) 自然成立. 设 $(\tilde{G},f)$ 是 G 的通用覆盖群, 于是 $\mathrm{Lie}\tilde{G}=\mathrm{Lie}G=\mathfrak{g}$, $df=\mathrm{id}$. 又设 $\tilde{G}_1$ 是 $\tilde{G}$ 的以 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 为李代数的连通子群. 因为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ 为交换李代数, $\tilde{G}_1$ 为闭子群, 故 $\tilde{G}/\tilde{G}_1$ 为交换李群. 于是 $\tilde{G}_1\supseteq\tilde{G}^{(1)}$. 设 exp 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\tilde{G}$ 的指数映射, $X,Y\in\mathfrak{g}$, 从 $\exp tX\exp tY(\exp tX)^{-1}(\exp tY)^{-1}=\exp(t^2[X,Y]+o(t^2))$, 得 $[X,Y]\in\mathrm{Lie}\tilde{G}^{(1)}$, 于是 $\tilde{G}_1\subseteq\tilde{G}^{(1)}$, 所以 $\tilde{G}_1=\tilde{G}^{(1)}$.

注意 f 为开映射, 且 $f(\tilde{G}^{(1)})=G^{(1)}$, 于是 $G^{(1)}$ 为 G 的闭子群, 李代数为 $\mathfrak{g}^{(1)}$. □

习　　题

1. 证明连通李群 G 的中心 $C(G)$ 是 G 的闭正规子群, 且其李代数是 G 的李代数的中心.

2. 设李群 $G=SO(n,\mathbf{R})\otimes\mathbf{R}^n$, 求 $C(G)$, $G^{(1)}$ 及 $G/G^{(1)}$.

3. 设李群 $G = SO(n,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$, 求 $C(G)$, $G^{(1)}$ 及 $G/G^{(1)}$.

4. 设 $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & z \\ 0 & I_n & \beta' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{R}^{1\times n}, z \in \mathbf{R} \right\}$. 证明 G 是李群, 并求 $C(G)$, $G^{(1)}$, $G/C(G)$ 及 $G/G^{(1)}$.

2.10 旋 量 群

旋量群是正交群的通用覆盖群, 其实现与 Clifford 代数有密切关系. 其实 Clifford 代数也可以用来实现例外 Lie 群. 具体内容将在第 5 章中进行讨论.

定义 2.10.1 设 V 是 $\mathbf{R}$ 上 n 维 Euclid 空间, $(\ ,\ )$ 为其内积, 令 $\langle\ ,\ \rangle = -(\ ,\ )$. 记 $T^k(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k}$, V 的张量代数 $T(V) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k(V)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的结合代数. 将 $\{v \otimes v - \langle v, v\rangle 1 | \forall v \in V\}$ 生成的 $T(V)$ 的理想记为 J. 称商代数 $\mathrm{Cl}(V) = T(V)/J$ 为 V (关于 $\langle\ ,\ \rangle$) 的 **Clifford 代数**.

由于 $\mathbf{R} = T^0(V)$, $V = T^1(V)$, $T^0(V) \cap J = T^1(V) \cap J = \{0\}$, 因而可将 $\mathbf{R}$, V 视为 $\mathrm{Cl}(V)$ 的子空间. 由 $\mathbf{R}$ 与 V 生成 $T(V)$, 故也生成 $\mathrm{Cl}(V)$. 将 $x, y \in \mathrm{Cl}(V)$ 的积记为 xy. 也可以将 $\mathbf{R}$ 改为 $\mathbf{C}$ 或别的数域.

定理 2.10.1 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 V 的标准正交基, 即 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. 则 $\dim \mathrm{Cl}(V) = 2^n$, 且有基

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n; 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

证 因为 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 所以 $e_i e_i = \langle e_i, e_i \rangle 1 = -1$. 而 $i \neq j$ 时,

$$(e_i + e_j)(e_i + e_j) = \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle 1 = -2,$$
$$(e_i + e_j)(e_i + e_j) = e_i e_i + e_i e_j + e_j e_i + e_j e_j = -2 + e_i e_j + e_j e_i,$$

因此 $e_i e_j = -e_j e_i$. 故定理成立. □

令 $T(V)_0 = \sum\limits_{k \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)} T^k(V)$, $T(V)_1 = \sum\limits_{k \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)} T^k(V)$. 因为 $v \otimes v - \langle v, v \rangle 1 \in T(V)_0$, 所以 $J = J_0 \dot{+} J_1$, $J_i = J \cap T(V)_i$. 于是 $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(V)_0 \dot{+} \mathrm{Cl}(V)_1$, $\mathrm{Cl}(V)_i = T(V)_i / J_i$, $i = 0, 1$.

定理 2.10.2 1) $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(V)_0 \dot{+} \mathrm{Cl}(V)_1$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 阶化代数, 即有

$$\mathrm{Cl}(V)_0 \mathrm{Cl}(V)_0 = \mathrm{Cl}(V)_0,$$
$$\mathrm{Cl}(V)_0 \mathrm{Cl}(V)_1 = \mathrm{Cl}(V)_1 \mathrm{Cl}(V)_0 = \mathrm{Cl}(V)_1,$$
$$\mathrm{Cl}(V)_1 \mathrm{Cl}(V)_1 = \mathrm{Cl}(V)_0;$$

2)　有 $\mathrm{Cl}(V)$ 的对合自同构 α 满足 $\alpha(x_0+x_1)=x_0-x_1$, $x_i\in \mathrm{Cl}(V)_i$;

3)　若 $x\in \mathrm{Cl}(V)$ 满足 $xv=v(\alpha x)$, $\forall v\in V$, 则 $x\in \mathbf{R}$.

证　由 $e_ie_i=-1$ 及 $i\neq j$ 时, $e_ie_j=-e_je_i$, 知结论 1) 成立. 结论 2) 是结论 1) 的自然推论.

3)　记 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, $i_j=1$ 或 0. $x=\sum\limits_I\lambda_I\prod\limits_{j=1}^n e_j^{i_j}$, $\lambda_I\in\mathbf{R}$. 由 $xv=v(\alpha x)$ 知 $xe_s=e_s(\alpha x)$, 故 $e_s^{-1}xe_s=\alpha x$. 但

$$e_s^{-1}\left(\prod_{j=1}^n e_j^{i_j}\right)e_s=\prod_{j=1}^n e_s^{-1}e_j^{i_j}e_s=\begin{cases}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^n i_j}\prod\limits_{j=1}^n e_j^{i_j}, & i_s=0,\\ (-1)^{1+\sum\limits_{j=1}^n i_j}\prod\limits_{j=1}^n e_j^{i_j}, & i_s=1.\end{cases}$$

又 $\alpha\left(\prod\limits_{j=1}^n e_j^{i_j}\right)=(-1)^{\sum\limits_{j=1}^n i_j}\prod\limits_{j=1}^n e_j^{i_j}$. 于是 $i_s=1$ 时, $\lambda_I=0$. 因而 $x=\lambda_{(0,0,\cdots,0)}\in\mathbf{R}$. □

定理 2.10.3　存在 $\mathrm{Cl}(V)$ 的对合的反自同构 β, 满足 $\beta(v)=v$, $\forall v\in V$, $\alpha\beta=\beta\alpha$.

证　由于 $T(V)$ 有基 $\{1,e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}\}$. 于是有 $T(V)$ 的唯一的线性变换 Φ 使得

$$\Phi(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k})=e_{i_k}\otimes e_{i_{k-1}}\otimes\cdots\otimes e_{i_1}.$$

若 $v_j=\sum\limits_{i_j=1}^n a_{i_jj}e_{i_j}$, $1\leqslant j\leqslant k$, 于是有

$$\begin{aligned}\Phi(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k)&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_kk}\Phi(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k})\\&=\sum_{i_1,i_2,\cdots i_k}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_kk}e_{i_k}\otimes e_{i_{k-1}}\otimes\cdots\otimes e_{i_1}\\&=v_k\otimes v_{k-1}\otimes\cdots\otimes v_1.\end{aligned}$$

特别地, 由

$$\begin{aligned}\Phi\left(\left(\bigotimes_{i=1}^k v_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{j=k+1}^m v_j\right)\right)&=\left(\bigotimes_{j=0}^{m-k+1}v_{m-j}\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=0}^{k-1}v_{k-i}\right)\\&=\Phi\left(\bigotimes_{j=k+1}^m v_j\right)\bigotimes\Phi\left(\bigotimes_{i=1}^k v_i\right),\end{aligned}$$

知 $\Phi^2=\mathrm{id}$, 故 Φ 是 $T(V)$ 的对合反自同构.

再由 $\Phi(v\otimes v-\langle v,v\rangle 1)=v\otimes v-\langle v,v\rangle 1$, 知 $\Phi(J)=J$, 于是诱导出 $\mathrm{Cl}(V)$ 的一个对合反自同构 β. 由 $\forall v\in V,\Phi(v)=v$, 知 $\beta(v)=v$. 又 $\beta(\mathrm{Cl}(V)_i)=\mathrm{Cl}(V)_i$, $i=0,1$. 于是 $\alpha\beta=\beta\alpha$. □

定义 2.10.2 将定理 2.10.2 和定理 2.10.3 定义的 α,β 及 $\gamma=\alpha\beta=\beta\alpha$ 称为 $\mathrm{Cl}(V)$ 的**结构映射**.

定理 2.10.4 设 $\mathrm{Cl}(V)$ 是 Clifford 代数, V 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 满足 $(e_i,e_j)=-\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$.

1) 令 L 是由 $\{e_re_s|1\leqslant r<s\leqslant n\}$ 生成的 $\mathrm{Cl}(V)$ 的子空间, 则 L 对于 $[x,y]=xy-yx$ 是一个 Lie 代数, 同构于 $so(n,\mathbf{R})$.

2) 令 $Pin(V)=\{x\in\mathrm{Cl}(V)|x(\gamma x)=(\gamma x)x=1;\ xv(\beta x)\in V,\ \forall v\in V\}$. 若 $x\in Pin(V)$, 定义 V 的线性变换 πx 为 $\pi x(v)=xv(\beta x)$. 则有

(i) $\pi x\in O(V)$;

(ii) $Pin(V)$ 是 $\mathrm{Cl}(V)$ 中可逆元素构成的群的子群;

(iii) π 是 $Pin(V)$ 到 $O(V)$ 的满同态, $\ker\pi=\{\pm1\}$;

(iv) $n\geqslant 2$ 时, $\pi^{-1}(\det{}^{-1}(1))\subset\mathrm{Cl}(V)_0$, $\pi^{-1}(\det{}^{-1}(-1))\subset\mathrm{Cl}(V)_1$ 是连通的闭集; 称 $Spin(V)=\pi^{-1}(\det{}^{-1}(1))=Pin(V)\cap Cl(V)_0$ 为**旋量群**.

证 1) 欲证 L 是 Lie 代数, 只要验证 $[e_re_s,e_te_u]\in L$ 即可. 而

$$[e_re_s,e_te_u]=\begin{cases}0, & r,s,t,u\ \text{互不相同},\\ 2e_re_t, & r,t,u\ \text{互不相同},\ u=s,\\ 0, & r=t,s=u.\end{cases}$$

设 $E_{ij}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为 i 行、j 列处为 1 其余元素为 0 的矩阵. $so(n,\mathbf{R})$ 有基 $\{2(E_{sr}-E_{rs})|1\leqslant r<s\leqslant n\}$. 由 $\varphi(e_re_s)=2(E_{sr}-E_{rs})$ 所定义的 L 到 $so(n,\mathbf{R})$ 的线性映射 φ 是 Lie 代数的同构.

2) 显然 $1\in Pin(V)$. $x\in Pin(V)$, $x(\gamma x)=(\gamma x)x=1$, 因此 $x^{-1}=\gamma x$. 而且由 $\beta(xx^{-1})=\beta(x^{-1}x)=1$, 知 $(\beta x)^{-1}=\beta x^{-1}=\beta\gamma x=\alpha x$.

$v\in V$. 由于 $\pi x(v)\in V$, 故 $-\pi x(v)=\alpha(\pi x(v))=\alpha(xv(\beta x))=\alpha(x)(-v)(\alpha\beta x)=-\alpha(x)v(\gamma x)$. 又 $\beta=\alpha\gamma$. 进而

$$\begin{aligned}(\pi x(v),\pi x(v))&=-\langle\pi x(v),\pi x(v)\rangle=xv(\beta x)(-\pi x(v))\\&=-xv(\beta x)(\alpha x)v(\gamma x)=-xv(\alpha\gamma x)(\alpha x)v(\gamma x)\\&=-xv(\alpha((\gamma x)x)v(\gamma x)=-xvv(\gamma x)=(v,v)x(\gamma x)=(v,v).\end{aligned}$$

因而 $\pi x\in O(V)$.

由 $\pi x(V)=V$, 故对 $v\in V$, 有 $v_1\in V$, 使得 $xv_1(\beta x)=v$, 即 $x^{-1}v(\beta x)^{-1}=x^{-1}v(\beta x^{-1})=v_1\in V$, 故 $x^{-1}\in\mathrm{Pin}(v)$.

设 $x, y \in Pin(V)$, $v \in V$, 由 $(xy)v(\gamma xy) = xyv((\gamma y)\gamma x)) \in V$, 知 $xy \in Pin(V)$, 且 $\pi(xy) = (\pi x)(\pi y)$. 因此 $Pin(V)$ 是群, π 是 $Pin(V)$ 到 $O(V)$ 的同态.

设 $x \in \ker \pi$. 于是 $xv(\beta x) = v$. 所以 $v(\alpha x) = xv(\beta x)(\alpha x) = xv\alpha((\gamma x)x) = xv$. 由定理 2.10.2 知 $x \in \mathbf{R}$, 但 $x(\gamma x) = x^2 = 1$, 于是 $x = \pm 1$.

设 $r < s$, $x = \cos t + (\sin t)e_r e_s \in \mathrm{Cl}(V)_0$, 于是 $\gamma x = \cos t + (\sin t)(\gamma e_r e_s) = \cos t - (\sin t)e_r e_s$. 由此

$$\begin{aligned}(\pi x)e_u &= (\cos t + (\sin t)e_r e_s)e_u(\cos t - (\sin t)e_r e_s) \\ &= (\cos^2 t)e_u + (\cos t)(\sin t)e_r e_s e_u - (\cos t)(\sin t)e_u e_r e_s - (\sin^2 t)e_r e_s e_u e_r e_s.\end{aligned}$$

于是

$$(\pi x)e_u = \begin{cases} e_u, & u \neq r, u \neq s, \\ (\cos 2t)e_r + (\sin 2t)e_s, & u = r, \\ (-\sin 2t)e_r + (\cos 2t)e_s, & u = s. \end{cases}$$

因此 $x \in Pin(V) \cap \mathrm{Cl}(V)_0$. $\{\pi x \mid x = \cos t + (\sin t)e_r e_s, 1 \leqslant r < s, t \in \mathbf{R}\}$ 生成 $SO(V)$, 于是

$$\pi(Spin(V)) = SO(V).$$

$n \geqslant 2$ 时, $\cos t + (\sin t)e_r e_s$, $t \in [0, \pi]$ 是 $Spin(V)$ 中连接 1 与 -1 的道路, 于是 $Spin(V) = \pi^{-1}(SO(V))$ 在 $Pin(V)$ 的单位连通分支中, 即 $\pi^{-1}(\det^{-1}(1))$ 是连通的, 且在 $\mathrm{Cl}(V)_0$ 中. 注意 $(\gamma e_1)e_1 = -e_1 e_1 = 1$, $e_1(\gamma e_1) = -e_1 e_1 = 1$, 又

$$e_1 e_r(\beta e_1) = e_1 e_r e_1 = \begin{cases} -e_1, & r = 1, \\ e_r, & r \neq 1. \end{cases}$$

故 $e_1 \in Pin(V) \cap \mathrm{Cl}(V)_1$, $\pi e_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$. 所以 $\pi^{-1}(\det^{-1}(-1)) = e_1\pi^{-1}(\det^{-1}(1)) = e_1 Spin(V) \subset \mathrm{Cl}(V)_1$ 是连通的. 故 $Pin(V) = (Pin(V) \cap \mathrm{Cl}(V)_0) \cup (Pin(V) \cap \mathrm{Cl}(V)_1)$. □

习　题

在本节习题中均假设 V 是 $\mathbf{R}$ 上 Euclid 空间, $(\ ,\ )$ 为内积, $\mathrm{Cl}(V)$ 是关于 $\langle\ ,\ \rangle = -(\ ,\ )$ 的 Clifford 代数.

1. 设 $\dim V = 1$.
   1) 证明 $\mathrm{Cl}(V)$ 与 $\mathbf{C}$ 同构;
   2) 确定结构映射 α, β 与 γ; 并证明 γ 是 $\mathbf{C}$ 的共轭.
2. 设 $\dim V = 2$.

1) 证明 $\mathrm{Cl}(V)$ 与四元数体 $\mathbf{H}$ 同构;

2) 确定结构映射 α, β 与 γ; 并证明 γ 是 $\mathbf{H}$ 的共轭.

3. 设 $\dim V > 1$. 证明 $\mathrm{Cl}(V)_0$ 同构于 $\dim V - 1$ 维空间上的 Clifford 代数.

4. 设 $\dim V = 2n$, 或 $\dim V = 2n+1$. Lie 代数 L 证明 $\{e_{2i-1}e_{2i} | 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 生成 L 的极大交换子代数.

5. 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 V 的标准正交基.

1) 验证 $e_i \in Pin(V)$, 而且满足 $\pi(e_i)(v) = v - 2(v, e_i)e_i$, $v \in V$;

2) 证明 $x(t) = \cos t + (\sin t)e_r e_s$ $(r < s)$ 是 $Spin(V)$ 的单参数子群;

3) 证明 L (如定理 2.4.10 的 1) 中所述) 是 $Spin(V)$ 的 Lie 代数;

4) 设 $\dim V = 2n$, 或 $\dim V = 2n+1$. 证明 $\widetilde{T} = \left\{ \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\cos \dfrac{x_i}{2} + \left(\sin \dfrac{x_i}{2} \right) e_{2i-1}e_{2i} \right| x_i \in \mathbf{R} \right\}$ 是 $Spin(V)$ 的极大交换连通子群, 并求 $\pi(\widetilde{T})$.

6. 设 A 是 $\mathbf{R}$ 上的结合代数, J 是 A 到 V 的线性映射, 满足 $J(v)^2 = (v, v)1$. 证明存在唯一的 $\mathrm{cl}(V)$ 到 A 的代数的同态 θ, 使得 $\theta(v) = J(v)$.

7. 设 $V = V_1 \dot{+} V_2$, 证明 $\mathrm{Cl}(V) \cong \mathrm{Cl}(V_1) \otimes \mathrm{Cl}(V_2)$.

8. 设 V 是域 $F(\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R})$ 上 $2n$ 维线性空间, 证明 $\mathrm{cl}(V)$ 同构于 F 上 n^2 阶方阵代数.

第 3 章　紧李群的结构

本章讨论紧李群的结构与分类，由于复紧李群相对较简单，因而主要是讨论实紧李群.

3.1　紧李群的不变内积

定义 3.1.1　李群 G 的拓扑若是紧致的，则称 G 为**紧李群**.

例 3.1.1　T^n, $O(n,\mathbf{R})$, $SO(n,\mathbf{R})$, $SU(n)$ 等都是紧李群.

显然紧李群仅有有限个连通分支. 下面主要讨论连通紧李群. 因此凡未声明，所提到的紧李群均指连通紧李群.

设 U 为李群 G 的单位 e 的坐标邻域，$L(x)$ 为辅助函数构成的矩阵; $T_e(G)$, $T_e(G)^*$ 的对偶基

$$\frac{\partial}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$$

所对应的左不变向量场和左不变一次微分形式分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $\omega_1,\cdots,\omega_n$. 则有

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}=L(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

$$(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)=\mathrm{d}xL(x)^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)=L(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}(x)L(x)^{-1}=I_n.$$

这时, 我们可以定义在 U 上的积分. 设 $C(U)$ 为 U 上所有实连续函数的集合. $\forall f(x) \in C(U)$,

$$\int_U f(x)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \int_U f(x) \det L(x)^{-1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

对于紧李群 G, 这个积分可定义整个 G 上.

引理 3.1.1 记 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式, $\omega_i|_e = \mathrm{d}x_i$. 则 G 上 n 阶左不变形式 ω 必为 $\omega = a\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n$, 其中 a 为常数.

证 设 L_g^* 为左平移 L_g 在微分形式上诱导的变换, ω 是左不变 n 阶微分形式. 设

$$\omega_e = a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n|_e = a\,\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n|_e,$$

于是有 $\omega_{g^{-1}} = aL_g^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_e = a(L_g^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge L_g^*\omega_n)_e = a(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_{g^{-1}}$. 即 $\omega = a\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$. 显然, 对任何常数 $a, a\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 是左不变 n 阶微分形式. □

若 G 是紧李群, 则有有限个坐标邻域 $U_1, U_2, \cdots, U_s$ 覆盖 G, 且有 G 上的函数 f_i, 满足:

1) $\mathrm{Auport} f_i \subseteq U_i$,

2) $f_i \geqslant 0$,

3) $\sum\limits_{i=1}^{s} f_i = 1$.

由于在每个 U_i 可定义积分, 于是可以定义 G 上的积分为: $\int_G f\omega = \sum\limits_{i=1}^{s} \int_{U_i} f f_i \omega$. 特别地, 当 $f=1$ 时, $V(G) = \int_G f\omega = \int_G \omega = \sum\limits_{i=1}^{s} \int_{U_i} f_i \omega$ 称为 G 的**体积**.

引理 3.1.2 设 $U_1, \cdots, U_s$ 与 $V_1, \cdots, V_t$ 都是 G 的坐标邻域覆盖, 对应的单位分解分别为 $\sum\limits_{i=1}^{s} f_i = 1$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{t} g_i = 1$. 则 $\sum\limits_{i=1}^{s} \int_{U_i} f f_i \omega = \sum\limits_{j=1}^{t} \int_{V_j} f g_j \omega$.

证 $\{U_i \cap V_j\}$ 仍为坐标邻域覆盖. 对应的单位分解为 $1 = \sum\limits_{i,\,j=1}^{s,t} f_i g_j$. 于是

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{U_i} f f_i \omega = \sum_{i,\,j=1}^{s,t} \int_{U_i \cap V_j} f f_i g_i \omega = \sum_{j=1}^{t} \int f g_j \omega. \qquad \square$$

由此引理知 G 上积分的定义与 $\{U_i, f_i\}$ 的选取无关.

定理 3.1.1 设 G 是紧李群, 则在 G 上存在唯一的积分 $\int_G f\omega$ 满足下面的条件:

1) **线性性** $\forall f, g \in C^\infty(G)$ 与常数 λ, μ 有 $\int_G (\lambda f + \mu g)\omega = \lambda \int_G f\omega + \mu \int_G g\omega$;

2)　**单调性**　若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_G f\omega \geqslant 0$;

3)　**正则性**　$\int_G \omega = 1$;

4)　**左不变性**　$\forall \tau \in G$ 有 $\int_G f(\tau\sigma)\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$.

证　由我们给出积分的定义易得线性性和单调性. 再由引理 3.1.1 和引理 3.1.2, 设由非零的左不变形式 ω' 给出的积分 $f \to \int_G f\omega'$ 相应的 G 的体积为 V, 显然 $V > 0$. 于是令 $\omega = \frac{1}{V}\omega'$, 则

$$\int_G f\omega = \int_G f\frac{\omega'}{V} = \frac{1}{V}\int_G f\omega'.$$

于是 $\int_G \omega = 1$.

由于 ω 是左不变形式, 即 $\forall \tau \in G, L_\tau^*\omega = \omega$, 所以

$$\int_G f(\sigma)\omega(\sigma) = \int_G (fL_\tau)(\sigma)L_\tau^*\omega(\sigma) = \int_G f(\tau\sigma)\omega(\sigma).$$

于是满足条件 1)~4) 的积分是存在的.

现在证明满足条件 1)~4) 的积分是唯一的. 设 $\int_G f(h)\delta h$ 也是满足条件 1)~4) 的积分.

类似地, 有右不变形式 ω_1, 并可构造一个满足线性性、单调性和正则性的右不变积分, 即有

$$\int_G f(\sigma\tau)\omega_1(\sigma) = \int_G f(\sigma)\omega_1(\sigma), \quad \forall \tau \in G.$$

首先证明 $\forall f \in C(G \times G)$ 有

$$\int_G \left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau) = \int_G \left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma).$$

若 $f(\sigma,\tau) = f_1(\sigma)f_2(\tau)$, 即可分离变量, 上式显然成立.

由函数论知 $C(G \times G)$ 中由 $\{f(\sigma,\tau) = f_1(\sigma)f_2(\tau) \mid f_1, f_2 \in C(G)\}$ 张成的线性子空间 S 在一致收敛的拓扑意义下是稠密的.

设 $f \in C(G \times G)$. 于是有函数列 $\{f_n\} \subset S$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. 于是

$$\int_G \left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau) = \lim_{n\to\infty}\int_G \left[\int_G f_n(\sigma,\tau)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_G \left[\int_G f_n(\sigma,\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma) = \int_G \left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma).$$

现设 $f \in C^\infty(G)$, 令 $f(\sigma,\tau)=f(\sigma\tau)$, 则有

$$\begin{aligned}\int_G f(\sigma)\omega_1(\sigma) &= \int_G\left[\int_G f(\sigma)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau)=\int_G\left[\int_G f(\sigma\tau)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau)\\ &=\int_G\left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega_1(\sigma)\right]\omega(\tau)=\int_G\left[\int_G f(\sigma,\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma)\\ &=\int_G\left[\int_G f(\sigma\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma)=\int_G\left[\int_G f(\tau)\omega(\tau)\right]\omega_1(\sigma)=\int_G f(\tau)\omega(\tau).\end{aligned}$$

同样有 $\int_G f(\sigma)\omega_1(\sigma)=\int_G f(\tau)\delta(\tau)$. 于是 $\int_G f(\tau)\delta(\tau)=\int_G f(\tau)\omega(\tau)$ □

注 1) 也常将满足上述条件的 $\omega(g)$ 记为 dg, 说紧李群 G 的左不变积分时, 均指上述积分.

2) 可将左不变积分视为 $C(G)$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射: $f\to\int_G f(\tau)\omega(\tau)$, 满足单调性、正则性与左不变性, 左不变性即 f 与 $f\circ L_\sigma$ 有相同的像.

定理 3.1.2 设 $\int_G f(\tau)\omega(\tau)$ 是紧李群 G 的左不变积分, φ 是 G 的微分自同胚, 则

1) $\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)=\int_G f(\tau)\omega(\tau)$;

2) 右不变性: $\forall\tau\in G$ 有 $\int_G f(\sigma\tau)\omega(\sigma)=\int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$;

3) 逆不变性: $\int_G f(\tau^{-1})\omega(\tau)=\int_G f(\tau)\omega(\tau)$;

4) $\forall\alpha\in \mathrm{Aut}G$, $\int_G f(\alpha(\tau))\omega(\tau)=\int_G f(\tau)\omega(\tau)$.

证 注意映射 $f\to\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)$ 是线性的, 因 $1\circ\varphi=1$, $f\geqslant 0$ 则有 $f\circ\varphi\geqslant 0$, 故 $f\to\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)$ 是正则的, 单调的. 又 $f\circ L_\sigma\to\int_G f(\sigma(\varphi(\tau))\omega(\tau)=\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)$, 即 $f\to\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)$ 是左不变的, 即 $\int_G f(\varphi(\tau))\omega(\tau)$ 是左不变积分, 由定理 3.1.1 知结论 1) 成立.

注意 $L_\sigma, R_\sigma, \tau\to\tau^{-1}$ 与 α 都是 G 的微分自同胚, 于是所有结论成立. □

注 一个李群其上若能定义双不变的积分 (即有双不变体积元, Haar 测度), 则称为**幺模群** (unimodular 群). 可以证明下面的群均是幺模的:

1) 李群 G 满足 $\mathrm{Ad}G$ 紧, 特别 G 紧;

2) 半单李群;

3) 连通幂零李群.

定义 3.1.2　设 V 是 n 维线性空间, G 是 $GL(V)$ 的李子群. V 中内积 $(x,\ y)$ 称为在 G 下不变, 如果有 $(g(x),\ g(y)) = (x,\ y),\ \forall x,\ y \in V,\ g \in G$.

定理 3.1.3(Weyl 定理)　设 G 为 $GL(V)$ 的紧子群. 则在 V 上存在 G 的不变内积.

证　事实上, 设 $(x,y)_0$ 是 V 的任一内积, 则 $(x,y) = \dfrac{1}{V(G)}\displaystyle\int_G (g(x),g(y))_0\omega$ 是 G 的不变内积. □

定理 3.1.4　连通复紧李群可换, 故为复环面.

证　设 G 为连通复紧李群, $\mathrm{Lie}\ G = \mathfrak{g}$ 为其李代数. 由 $\mathrm{Ad}G$ 与 G 同态, 知 $\mathrm{Ad}G$ 紧. 因而在 $\mathfrak{g}$ 上有 $\mathrm{Ad}G$ 不变内积 $(X,\ Y)$. 故 G 上函数 $((\mathrm{Ad}g)X,\ Y)$ 是全纯函数, 而紧复流形上全纯函数为常数. 即有 $(\mathrm{Ad}(g)X,\ Y) = (\mathrm{Ad}(e)X,\ Y) = (X,\ Y)$. 任取 $Z \in \mathfrak{g}$, 则有 $((\mathrm{Ad}\exp tZ)X,\ Y) = (X,\ Y)$. 因而 $(\mathrm{Ad}\exp tZ)X = e^{t\mathrm{ad}Z}X = X$. 故 $(\mathrm{ad}Z)X = 0$, 即 $\mathfrak{g}$ 可换. 故 G 可换. □

由这个定理知以后只要研究实紧李群就可以了.

定理 3.1.5　设 $(\rho,\ V)$ 是实紧李群 G 的实表示. 则在 V 中有基, 使得 $\rho(G)$ 为 $O(n)$ 的闭子群, 其中 $\dim V = n$. 反之, $O(n)$ 的闭子群必为紧李群.

证　因为 G 紧, 故 $\rho(G)$ 亦紧. 于是 V 上有关于 $\rho(G)$ 的不变内积 $(x,\ y)$. 对此内积的标准正交基, $\rho(g)\ (g \in G)$ 的矩阵表示必为正交矩阵, 故 $\rho(G) \subseteq O(n)$. 又 $\rho(G)$ 紧, 故闭.

反之, 因 $O(n)$ 紧, 故其闭集亦紧, 因而 $O(n)$ 的闭子群必为紧李群. □

定理 3.1.6　设 G 为连通 (实) 紧李群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 为其李代数, 则下面事实成立:

1)　G 的任一有限维表示完全可约;

2)　G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 有如下分解: $\mathfrak{g} = C(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$, 其中 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想;

3)　G 有如下分解: $G = C(G)G_1 \cdots G_s$, 其中 $C(G)$ 是 G 的中心, G_i 是 G 的正规子群, 且其李代数是单李代数 (即 G_i 是单李群).

证　1)　事实上, (ρ,V) 为 G 的有限维表示 $(u,v)_0$ 的任一内积, 则 $(u,v) = \dfrac{1}{V(G)}\displaystyle\int_G (\rho(g)u,\rho(g)v)_0\omega$ 是 V 的对 G 不变的内积. 故 $\rho(g) \in O(V)$. 若 V_1 是不变子空间, 则其正交补也是不变子空间, 故 (ρ,V) 完全可约.

2)　特别地, 用于 G 的伴随表示 $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ 上有 G 不变内积, 完全可约. 于是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 完全可约, 因而有分解: $\mathfrak{g} = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_t$, 其中 V_i 是极小不变子空间. 由于伴随表示的不变子空间是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 再由 $i \neq j$ 时, $[V_i, V_j] \subseteq V_i \cap V_j = \{0\}$, 知道上述分解也是理想直和分解, 而且 V_i 的理想也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 再

由 V_i 的极小性, 知 V_i 没有非平凡理想. 因此, 当 $\dim V_i = 1$ 时, $V_i \subseteq C(\mathfrak{g})$; 当 $\dim V_i > 1$ 时, V_i 是单李代数. 于是结论 2) 成立.

3) 由于 $\forall X \in \mathfrak{g}$, 有 $X = X_0 + X_1 + \cdots + X_s$, $[X_i, X_j] = 0$, 于是有 $\exp X = \exp X_0 \cdot \exp X_1 \cdots \exp X_s \in G_0 \cdot G_1 \cdots G_s$, 其中 G_0 由 $\exp C(\mathfrak{g})$ 生成. 故 $G_0 \subseteq C(G)$. 所以定理成立. □

注 1 紧李群及其李代数的推广, 是所谓约化李群、约化李代数.

定义 3.1.3 李代数 $\mathfrak{g}$ 称为**约化的**, 若 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 完全可约. 连通李群 G 称为**约化的**, 若 G 的伴随表示 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ 完全可约.

显然有下面结果:

1) 连通李群 G 是约化李群当且仅当 G 的李代数 $\mathrm{Lie}G = \mathfrak{g}$ 是约化李代数;

2) 若 G 为连通约化李群, 则 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 有如下分解: $\mathfrak{g} = C(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$, 其中 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想;

G 有如下分解: $G = C(G)G_1 \cdots G_s$, 其中 $C(G)$ 是 G 的中心, G_i 是 G 的单正规子群.

其实还可证明 G 的任一有限维表示完全可约. 约化李群 G 的无限维表示是李群理论中一个非常重要但也非常困难的领域.

注 2 对于紧李群 G 的伴随表示, 有 $\mathfrak{g}$ 的内积 (X, Y) 满足: $(e^{\mathrm{ad}tZ}X, e^{\mathrm{ad}tZ}Y) = (X, Y)$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. 于是

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X, Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\mathrm{ad}tZ}X, e^{\mathrm{ad}tZ}Y)_{t=0} = ([Z, X],\ Y) + (X, [Z,\ Y]).$$

将此性质代数化得下面的定义.

例 3.1.2 李代数上内积 $(X,\ Y)$ 称为**不变的**, 如果有

$$([Z, X],\ Y) + (X, [Z,\ Y]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

若李代数 $\mathfrak{g}$ 有不变内积, 则 $\mathfrak{g}$ 称为**紧李代数**.

例 3.1.3 若 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 $B_{\mathfrak{g}}$ 负定, 则 $-B_{\mathfrak{g}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的不变内积. 因而此时 $\mathfrak{g}$ 是紧李代数, 而且半单.

引理 3.1.3 设 G 为连通李群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 为其李代数. $(\mathrm{Ad},\ \mathfrak{g})$ 为 G 的伴随表示. 则 $\mathfrak{g}$ 中关于$\mathrm{Ad}G$ 的不变内积就是 $\mathfrak{g}$ 的不变内积.

证 设 $(X,\ Y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的内积, 且对 $\mathrm{Ad}G$ 不变, 注意到 $\mathrm{Ad}\exp tZ = e^{\mathrm{ad}tZ}$, 则 $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 有 $(e^{\mathrm{ad}tZ}X, e^{\mathrm{ad}tZ}Y) = (X, Y)$. 所以 $([Z, X]), Y) + (X, [Z, Y]) = 0$. 故 (X, Y) 是 $\mathfrak{g}$ 的不变内积.

反之, 由于 $(X,\ Y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不变内积, 即 $((\mathrm{ad}Z)X,\ Y) + (X,\ (\mathrm{ad}Z)Y) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 以 $\mathrm{ad}Z$, X, Y 表示在对 $(X,\ Y)$ 的标准正交基下的矩阵及坐

标, 则上式可写成 $((\mathrm{ad}Z)X)'Y + X'(\mathrm{ad}Z)Y = 0$, 其中 X', $(\mathrm{ad}Z)'$ 表示坐标与矩阵之转置. 所以 $X'((\mathrm{ad}Z)' + \mathrm{ad}Z)Y = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. 故有 $(\mathrm{ad}Z)' = -\mathrm{ad}Z$. 因而 $\mathrm{Ad}\exp Z = e^{\mathrm{ad}Z}$ 为正交矩阵. 于是有 $((\mathrm{Ad}\exp Z)X, (\mathrm{Ad}\exp Z)Y) = (X, Y)$. 由 G 连通, $\exp\mathfrak{g}$ 生成 G, 故 (X, Y) 对 $\mathrm{Ad}G$ 是不变的. □

推论 紧李群的李代数一定是紧李代数.

事实上, 设 G 是紧李群, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$. $\mathrm{Ad}G$ 是紧李群, 且 $\mathrm{Ad}G \subseteq GL(\mathfrak{g})$. 由定理 3.1.2 知, $\mathfrak{g}$ 上有 $\mathrm{Ad}G$ 不变内积, 即 $\mathfrak{g}$ 有不变内积, 故为紧李代数. □

定理 3.1.7 紧李代数 $\mathfrak{g}$ 必为约化李代数.

证 只需要证明 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 完全可约. 设 $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}$, 满足 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\ (\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}_1$. 令 $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 关于不变内积的正交补. 任取 $X \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$, $Y \in \mathfrak{g}_1$, $Z \in \mathfrak{g}$. 由 $((\mathrm{ad}Z)X, Y) + (X, (\mathrm{ad}Z)Y) = 0$, 且 $X \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$, $(\mathrm{ad}Z)Y \in \mathfrak{g}_1$, 故 $((\mathrm{ad}Z)X, Y) = 0$. 因而 $(\mathrm{ad}Z)X \in \mathfrak{g}_1^{\perp}$, $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 为不变子空间. 故 $\mathfrak{g}$ 约化. □

3.2 紧半单李代数决定的李群

定理 3.2.1 实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 为紧半单李代数的充分必要条件是其 Killing 型 B_0 负定.

证 设 $\mathfrak{g}_0$ 紧半单, (X_0, Y_0) 为不变内积. 故

$$(\mathrm{ad}Z_0(X_0), Y_0) + (X_0, \mathrm{ad}Z_0(Y_0)) = 0, \quad \forall X_0, Y_0, Z_0 \in \mathfrak{g}_0.$$

因而对内积 (X_0, Y_0) 的标准正交基, $\mathrm{ad}Z_0$ 的矩阵为实反对称矩阵, 故其特征值为纯虚数或零. 从而 $B_0(Z_0, Z_0) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}Z_0\mathrm{ad}Z_0) \leqslant 0$. 又 $B_0(Z_0, Z_0) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{ad}Z_0$ 的特征值全为零, 而 $\mathrm{ad}Z_0$ 可对角化当且仅当 $\mathrm{ad}Z_0 = 0$, 即 $Z_0 \in C(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$, 故 $Z_0 = 0$. 因而 B_0 负定.

反之, 设 B_0 负定, 即非退化, 故 $\mathfrak{g}_0$ 半单. 又 $-B_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 上不变内积, 故 $\mathfrak{g}_0$ 为紧半单李代数. □

以后, 如不声明, 均以 $-B_0$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的内积.

引理 3.2.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的有限维李代数, 其 Killing 型 (X,Y) 非退化. 则有

1) $\mathfrak{g}$ 的中心为零, 即 $C(\mathfrak{g}) = \{0\}$;

2) $\mathfrak{g}$ 的导子都是内导子, 即 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

证 1) 设 $X \in C(\mathfrak{g})$, 于是 $\mathrm{ad}X = 0$, 因此 $(X,Y) = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$. 从 (X,Y) 的非退化性知, $X = 0$.

2) 由结论 1), $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 是同构的. 因此 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 $(\mathrm{ad}X, \mathrm{ad}Y) = (X, Y)$, 是非退化的.

设 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型为 $(D_1, D_2)_\delta$. 因为 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想, 故 $(D_1, D_2)_\delta$ 在 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的限制就是 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

显然, $\mathfrak{a} = \{D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} | (D, \mathrm{ad}X)_\delta = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 一个子空间. 若 $D_1 \in \mathfrak{a}$, $D_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 则有 $([D_2, D_1], \mathrm{ad}X)_\delta = -(D_1, [D_2, \mathrm{ad}X])_\delta = -(D_1, \mathrm{ad}(D_2X))_\delta = 0$. 于是 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想.

若 $D \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}\mathfrak{g}$, 则对任何 $X \in \mathfrak{g}$, 有 $0 = (D, \mathrm{ad}X)_\delta = (D, \mathrm{ad}X)$. 由 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型的非退化性, 知 $D = 0$. 因此 $\mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}\mathfrak{g} = \{0\}$.

如果 $D \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$, 则有 $[D, \mathrm{ad}X] = \mathrm{ad}(DX) \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{ad}\mathfrak{g} = \{0\}$. 由结论 1) 知, $DX = 0$, 因此 $D = 0$, 即 $\mathfrak{a} = \{0\}$.

在 $\mathfrak{g}$ 中取基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 由 Killing 型的非退化性, 知矩阵 $A = ((X_i, X_j)) = ((\mathrm{ad}X_i, \mathrm{ad}X_j)) = ((\mathrm{ad}X_i, \mathrm{ad}X_j)_\delta)$ 是对称的可逆矩阵. 设 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 于是有唯一的 $\mathbf{F}$ 中元素组 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D,\ \mathrm{ad}X_1)_\delta \\ (D,\ \mathrm{ad}X_2)_\delta \\ \vdots \\ (D,\ \mathrm{ad}X_n)_\delta \end{pmatrix},$$

即 $(D, \mathrm{ad}X_i)_\delta - (\mathrm{ad}X_i, \mathrm{ad}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n)) = 0$. 于是有 $D_0 = D - \mathrm{ad}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n) \in \mathfrak{a} = \{0\}$. 故 $D = \mathrm{ad}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n)$. □

定理 3.2.2 紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 为紧李群, 其单位连通分支 $\exp \mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$ 也是紧李群, 记作 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$, 且 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的李代数等于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$, 与 $\mathfrak{g}_0$ 同构.

又若 G_0 是以 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的实连通李群, 则 $\mathrm{Ad}G_0 = \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$.

证 因为 $\mathfrak{g}_0$ 紧半单, 所以 $(X_0,\ Y_0) = -B_0(X_0,\ Y_0)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 上不变内积. 对任一 $\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$, 有

$$\begin{aligned}&(\sigma(X_0),\ \sigma(Y_0)) = -B_0(\sigma(X_0),\ \sigma(Y_0)) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\sigma(X_0)\mathrm{ad}\sigma(Y_0))\\ =& -\mathrm{tr}(\sigma(\mathrm{ad}X_0)\sigma^{-1}\sigma(\mathrm{ad}Y_0)\sigma^{-1}) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X_0\mathrm{ad}Y_0) = (X_0,\ Y_0).\end{aligned}$$

因而 $\sigma \in O(\mathfrak{g}_0)$. 故 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 为紧李群 $O(\mathfrak{g}_0)$ 的闭子群, 故为紧李群.

又 $\mathfrak{g}_0$ 半单, 故 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的李代数 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}_0 = \mathrm{ad}\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}_0$. 故 $\exp \mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的单位连通分支.

G_0 实连通, $\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0$ 紧半单, $\mathrm{Ad}G_0$ 由 $\{\mathrm{Ad}\exp X_0 | X_0 \in \mathfrak{g}_0\}$ 生成, 而 $\mathrm{Ad}\exp X_0 = \exp \mathrm{ad}X_0$, 因而 $\mathrm{Ad}G_0 = \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$. □

定理 3.2.3 设 G_0 是实连通李群, 其李代数 $\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0 = T_e(G_0)$ 是紧李代数, $(X_0,\ Y_0)$ 是不变内积, 则在 G_0 上有 Riemann 结构 $Q(X,\ Y)$ 满足

1) $Q_e(X,\ Y) = (X_0,\ Y_0)$;

2)　$Q(X, Y)$ 在左右平移下不变;

3)　由 $Q(X, Y)$ 决定的 G_0 上的 Riemann 联络是左不变的, 且 $\nabla_X(X)=0$. 因而 G_0 上的测地线是单参数子群, 反之亦然. 故 G_0 为完备 Riemann 流形.

证　因 (X_0, Y_0) 是 $T_e(G_0)$ 上正定双线性函数, 现定义 Q 如下: $Q_e(X_0,Y_0)=(X_0,\ Y_0)$, $Q_g=L^*_{g^{-1}}Q$, 即 $X_g,\ Y_g\in T_g(G_0)$, 有

$$Q_g(X_g,\ Y_g)=L^*_{g^{-1}}Q_e(X_g,\ Y_g)=Q_e(dL_{g^{-1}}X_g,\ dL_{g^{-1}}Y_g).$$

显然, Q 是在左平移下不变的 Riemann 结构, 即 $L_g^*Q=Q$. 又从 $(X_0,\ Y_0)$ 的不变性, 知 $(X_0,\ Y_0)$ 对 $\mathrm{Ad}G_0$ 不变, 即 $(d\mathrm{ad}g(X_0),\ d\mathrm{ad}g(Y_0))=(X_0,\ Y_0)$. 而 $\mathrm{ad}g=L_gR_{g^{-1}}$, $Q_e(dL_gdR_{g^{-1}}(X_0),\ dL_gdR_{g^{-1}}(Y_0))=Q_e(X_0,\ Y_0)$, 故 $L_g^*Q_e(dR_{g^{-1}}X_0,\ dR_{g^{-1}}Y_0)=Q_e(X_0,\ Y_0)$. 但 Q 是左不变的, 于是

$$Q_{g^{-1}}(dR_{g^{-1}}X_0,\ dR_{g^{-1}}Y_0)=Q_e(X_0,\ Y_0).$$

即 $R^*_{g^{-1}}Q_{g^{-1}}(X_0,\ Y_0)=Q_e(X_0,\ Y_0)$, 所以 $R^*_{g^{-1}}Q_{g^{-1}}=Q_e$. 因而 Q 也是右不变的.

设 ∇ 是由 Q 决定的 Riemann 联络, $X_e,Y_e,Z_e\in\mathfrak{g}_0$, $X=\{X_g=dL_gX_e\}$, $Y=\{Y_g=dL_gY_e\}$, $Z=\{Z_g=dL_gZ_e\}$. 则有

$$\begin{aligned}&2Q(X,\ \nabla_ZY)\\=&ZQ(X,\ Y)+Q(Z,\ [X,\ Y])+YQ(X,\ Z)+Q(Y,\ [X,\ Z])\\&-XQ(Y,Z)-Q(X,[Y,\ Z])\\=&Q(Z,\ [X,\ Y])+Q(Y,\ [X,\ Z])-Q(X,\ [Y,\ Z])=Q(X,\ [Z,\ Y]).\end{aligned}$$

因而 $\nabla_ZY=\dfrac{1}{2}[Z,\ Y]$. 因而 ∇ 是左不变联络 (而且是 (0) 联络).

由 $\nabla_XX=0$, 故 G_0 中的曲线为测地线当且仅当为 G_0 的单参数子群. 所以 G_0 是完备 Riemann 流形.　□

定理 3.2.4　若实连通李群 G^* 的李代数 $\mathrm{Lie}G^*=\mathfrak{g}_0$ 是紧半单李代数, 则 G^* 是紧半单李群.

证　记 $G_0=\mathrm{Ad}G^*$, 故由定理 3.2.2 知 G_0 紧半单及 $\pi=\mathrm{ad}$: $G^*\to G_0$ 是覆盖映射, 以 Q^*, Q 分别表示 G^*, G_0 的由 Killing 型确定的 Riemann 结构. 显然有 $Q^*=\pi Q$.

若 G^* 非紧, 则由微分几何理论知, 有从 e^* 出发的半直线, 这是测地的, 因而在单参数子群上, 记作 $\gamma_X(t)$, $0\leqslant t\leqslant\infty$. 特别地, $\gamma_X(t)$, $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$ 为直线, 而且直线任意两点可用左平移移到半直线上.

$\pi\gamma_X(t)$ 则是 G_0 上的单参数子群, 故为测地线. 因而其闭包 $\overline{\pi\gamma_X(t)}$ 紧. 故有实数序列 $\{t_n\}$ 满足 $t_n \to \infty$, 而 $\pi\gamma_X(t_n) \to e$. 由于 π 是覆盖映射, 于是有 e 的半径为 r 的球邻域 $B_r(e)$ 使得 $\pi^{-1}(B_r(e))$ 的每个连通分支 C 在 π 下与 $B_r(e)$ 同胚, 而且 $\pi : C \to B_t(e)$ 保持距离. 又 $\pi(\gamma_X(t_n)) \to e$, 故可以假定 $\pi(\gamma_X(t_n)) \in B_r(e)$.

于是, $\gamma_X(t_n) \in \pi^{-1}(B_r(e))$, 因而 $\gamma_X(t_n)$ 必落在 π^{-1} $(B_r(e))$ 的某个连通分支 C 中. 设 $\pi^{-1}(e) \cap C = \{z_m\}$, 即有 $z_m \in \pi^{-1}(e) \subseteq C(G^*)$, 且

$$d(z_m,\ \gamma_X(t_n)) = d(e,\ \pi\gamma_X(t_n)).$$

若能证明 $\gamma_X(t) \subseteq C(G^*)$, 则 $X \in C(\mathfrak{g}_0)$, 由 $\mathfrak{g}_0$ 半单, 知 $C(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$, 于是得到矛盾, 因而 G^* 必为紧半单李群.

欲证 $\gamma_X(t) \subseteq C(G^*)$, 只要证对任何 $g \in G^*$ 有

$$\delta(t) = \mathrm{ad}g\gamma_X(t) = \gamma_X(t).$$

由 Q^* 在 $\mathrm{ad}g$ 下不变, 故 $\mathrm{ad}g$ 是等距变换, 故 $\delta(t)$ 也为直线, 以 t 表示从 e^* 开始的弧长, 注意到 $z_m \in C(G^*)$, 故 $(\mathrm{ad}g)z_m = z_m$, 因而 $d(\delta(t_n),\ z_m) = d(\gamma_X(t_n),\ z_m)$, 从而

$$\begin{aligned} d(\delta(t_n),\ \gamma_X(t_n)) &\leqslant d(\delta(t_n),\ z_m) + d(\gamma_X(t_n),\ z_m) \\ &= 2d(\gamma_X(t_n),\ z_m) = d(\pi(\gamma_X(t_n)),\ \pi(z_m)) \\ &= 2d(\pi(\gamma_X(t_n)),\ e) \to 0. \end{aligned}$$

若 $\gamma_X(t) \neq \delta(t), \forall t \neq 0, (X,\ \mathrm{Ad}g(X)) \neq 0$. 则

$$d(\gamma_X(-1),\ \delta(1)) \leqslant d(e^*,\ \gamma_X(-1)) + d(e^*,\ \delta(1)) = 2.$$

记 $\mu(t) = \begin{cases} \gamma_X(t), & t \geqslant 0, \\ \delta(t), & t \leqslant 0. \end{cases}$ 若 $d(\gamma_X(-1),\ \delta(1)) = 2$, 则

$$\mathrm{arc}(\mu(t))_{-1\leqslant t\leqslant 1} = 2, \quad d(\mu(1),\ \mu(-1)) = 2.$$

故 $\mu(t)$ 是测地线, 为单参数子群, 于是 $X = \mathrm{Ad}g(Y)$, $\delta(t) = \gamma(t)$, 矛盾. 所以 $d_0 = d(\gamma_X(-1), \delta(1)) < 2$. 又

$$\lim_{n\to\infty} d(\gamma(t_n), \delta(t_n)) = 0, \quad t_n \to \infty,$$

于是有 $N \in \mathbf{N}$, 使得 $t_N > 1$, 而 $d_1 = d(\gamma_X(t_N), \delta(t_N)) < 2 - d_0$.

考虑从 $\gamma_X(-1)$ 经 $\delta(1)$, $\delta(t_N)$ 到 $\gamma(t_N)$ 的分段连接的弧线之长, 有

$$d_0 + (t_N - 1) + d_1 < t_N + 1 = \mathrm{arc}(\gamma_X(t))_{-1\leqslant t\leqslant t_N} = d((\gamma_X(-1), \gamma_X(t_N)),$$

矛盾, 故 $\delta(t)=\gamma(t)$. □

推论　以紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的实连通李群在同构意义下只有有限个.

定理 3.2.5　设实连通紧李群 G_0 的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有直和分解 $\mathfrak{g}_0=C(\mathfrak{g}_0)\oplus\mathfrak{g}_0^{(1)}$, 则 G_0 有李子群的乘积分解: $G_0=C(G_0)G_0^*$, 其中 $C(G_0)$ 紧, G_0^* 紧半单.

证　这是明显的. □

3.3　实李代数的复化

定义 3.3.1　实数域上一个李代数 $\mathfrak{g}_0$, 若把基域扩充为复数域, 则得到复数域上的一个线性空间

$$\mathfrak{g}_0^c=\{X+\sqrt{-1}Y|X,Y\in\mathfrak{g}_0\}.$$

在其中定义括积: $\forall X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\mathfrak{g}_0$,

$$[X_1+\sqrt{-1}Y_1,X_2+\sqrt{-1}Y_2]=[X_1,X_2]-[Y_1,Y_2]+\sqrt{-1}([X_1,Y_2]+[Y_1,X_2]).$$

则 $\mathfrak{g}_0^c$ 为李代数, 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的**复化**, 记为 $\mathfrak{g}_0^c$. 而 $\mathfrak{g}_0$ 称为 $\mathfrak{g}_0^c$ 的一个**实形式**.

例 3.3.1　1)　$so(n,\mathbf{R})^c=so(n,\mathbf{C})$;

2)　$sl(n,\mathbf{R})^c=sl(n,\mathbf{C})$;

3)　$su(n)$ 是 $sl(n,\mathbf{C})$ 的实形式.

事实上, 显然有 $su(n)^c\subseteq sl(n,\mathbf{C})$, 只要再注意 $\forall X\in sl(n,\mathbf{C})$, $A=X-\bar{X}'\in su(n)$.

定理 3.3.1　设 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^c$ 为其复化. $\mathfrak{g}$ 中变换 τ: $\tau(X+\sqrt{-1}Y)=X-\sqrt{-1}Y,\forall X,\ Y\in\mathfrak{g}_0$ 称为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的**共轭**, τ 有如下性质

1)　$\tau(X+Y)=\tau(X)+\tau(Y),\quad\forall X,\ Y\in\mathfrak{g}$;

2)　$\tau(\alpha X)=\overline{\alpha}\tau(X),\quad\forall\alpha\in\mathbf{C},\ X\in\mathfrak{g}$;

3)　$\tau([X,\ Y])=[\tau(X),\ \tau(Y)],\quad\forall X,\ Y\in\mathfrak{g}$;

4)　$\tau^2=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$;

5)　$\mathfrak{g}_0=\{X\in\mathfrak{g}|\tau(X)=X\}$.

证　1)　设 $X=X_1+\sqrt{-1}X_2,\ Y=Y_1+\sqrt{-1}Y_2$, 其中 $X_i,\ Y_i\in\mathfrak{g}_0,\ i=1,2$. 于是

$$\begin{aligned}\tau(X+Y)&=\tau((X_1+Y_1)+\sqrt{-1}(X_2+Y_2))\\&=X_1+Y_1-\sqrt{-1}(X_2+Y_2)=\tau(X)+\tau(Y).\end{aligned}$$

2)　设 $X=X_1+\sqrt{-1}X_2,\ X_i\in\mathfrak{g}_0,\ i=1,2$. 并设 $\alpha=a+\sqrt{-1}b,\ a,b\in\mathbf{R}$. 则有

$$\tau(\alpha X)=\tau((aX_1-bX_2)+\sqrt{-1}(aX_2+bX_1))=(a-\sqrt{-1}b)(X_1-\sqrt{-1}X_2)=\overline{\alpha}\tau(X).$$

3) 假设如 1), 则有

$$\begin{aligned}\tau[X,\ Y] &= \tau([X_1+\sqrt{-1}X_2,\ Y_1+\sqrt{-1}Y_2]) \\ &= [X_1-\sqrt{-1}X_2,\ Y_1-\sqrt{-1}Y_2] = [\tau(X),\ \tau(Y)].\end{aligned}$$

4) $\forall X = X_1+\sqrt{-1}X_2,\ X_1,\ X_2 \in \mathfrak{g}_0$, 有 $\tau^2(X) = \tau(X_1-\sqrt{-1}X_2) = X$. 即 $\tau^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

5) 由定义可知, $X \in \mathfrak{g}_0$, 则 $\tau(X) = X$. 反之, $X = X_1+\sqrt{-1}X_2$, 且 $X_i \in \mathfrak{g}_0, \tau(X) = X$, 即 $X_1+\sqrt{-1}X_2 = X_1-\sqrt{-1}X_2$. 因而 $X_2 = 0$. $X = X_1 \in \mathfrak{g}_0$. 故 5) 成立. □

定理 3.3.2 设 $\mathfrak{g}_0$ 是实李代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$. τ 是 $\mathfrak{g}$ 的对应 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭, 则下面的结论成立.

1) 若 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 (理想), 则 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想). 特别地, 若 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 则 $\mathfrak{g} = g_1^c \oplus \mathfrak{g}_2^c$;

2) 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想), 则 $\tau(\mathfrak{h})$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想). $\mathfrak{h}$ 可换, 则 $\tau(\mathfrak{h})$ 可换;

3) 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 则存在 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 $\mathfrak{h}_0$, 使 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 当且仅当 $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 因而对 $\mathfrak{g}$ 的任一子代数 $\mathfrak{h}$, 有 $\mathfrak{h} \cap \tau(\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h})^c$;

4) $\mathfrak{g}_0$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}_0^c$ 半单;

5) $C(\mathfrak{g}_0)^c = C(\mathfrak{g}_0^c)$;

6) $\mathfrak{g}_0$ 约化当且仅当 $\mathfrak{g}_0^c$ 约化.

证 1) 设 $X_i,\ Y_i \in \mathfrak{h}_0, i = 1, 2$. 则

$$[X_1+\sqrt{-1}X_2,\ Y_1+\sqrt{-1}Y_2] = [X_1,\ Y_1]-[X_2,\ Y_2]+\sqrt{-1}([X_1,\ Y_2]+[X_2,\ Y_1]).$$

而 $[X_1,\ Y_1],\ [X_2,\ Y_2],\ [X_1,\ Y_2]+[X_2,\ Y_1] \in \mathfrak{h}_0$, 故 $[\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. 若取 $Y_i \in \mathfrak{g}_0$, 则由 $[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{h}_0] \subseteq \mathfrak{h}_0$ 推出 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. 特别地, 若 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 则 $\mathfrak{g} = g_1^c \oplus \mathfrak{g}_2^c$. 故 1) 成立.

2) 设 $H_1,\ H_2 \in \mathfrak{h},\ \alpha \in \mathbf{C}$. 则有

$$\begin{aligned}&\tau(H_1)+\tau(H_2) = \tau(H_1+H_2) \in \tau(\mathfrak{h}),\\ &\alpha(\tau(H_1)) = \tau(\overline{\alpha}H_1) \in \tau(\mathfrak{h}),\\ &[\tau(H_1),\ \tau(H_2)] = \tau([H_1,\ H_2]) \in \tau(\mathfrak{h}).\end{aligned}$$

当 $\mathfrak{h}$ 为理想时, $[\mathfrak{g}, \tau(\mathfrak{h})] = \tau([\tau(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}] = \tau([\mathfrak{g},\ \mathfrak{h}] \subseteq \tau(\mathfrak{h})$. 故 2) 成立.

3) 若 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$, $H \in \mathfrak{h}$, 即有 $H_1,\ H_2 \in \mathfrak{h}_0$ 使得 $H = H_1+\sqrt{-1}H_2$. 因而有 $\tau(H) = H_1-\sqrt{-1}H_2 \in \mathfrak{h}$, 即 $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

反之, 若 $\tau(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$, 即有 $\forall H\in\mathfrak{h}$, $\tau(H)\in\mathfrak{h}$, 因而 $H+\tau(H)\in\mathfrak{h}$, $\sqrt{-1}(\tau(H)-H)\in\mathfrak{h}$. 又 $\tau(H+\tau(H))=H+\tau(H)\in\mathfrak{g}_0$. 故 $H+\tau(H)\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0$. 又 $\tau(\sqrt{-1}(\tau(H)-H))=\sqrt{-1}(\tau(H)-H)\in\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{h}$. 令 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{h}$. 则

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{1}{2}(H+\tau(H))+\frac{1}{2}(H-\tau(H))\\
&=\frac{1}{2}(H+\tau(H))+\frac{1}{2}\sqrt{-1}(\sqrt{-1}(\tau(H)-H))\in\mathfrak{h}_0+\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0.
\end{aligned}
$$

因而 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^c$.

显然, 对 $\mathfrak{g}$ 的任一子代数 $\mathfrak{h}$, 有 $\tau(\mathfrak{h}\cap\tau(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}\cap\tau(\mathfrak{h})$, 而且 $\mathfrak{g}_0\cap(\mathfrak{h}\cap\tau(\mathfrak{h}))=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0\cap\tau(\mathfrak{h})$. 故 $(\mathfrak{g}_0\cap(\mathfrak{h}))^c=\mathfrak{h}\cap\tau(\mathfrak{h})$.

4) 设 $B(X,Y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, 则 $B(X,Y)$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制为 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型. 又若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的基, 自然也是 $\mathfrak{g}$ 的基. 于是矩阵 $(B(X_i,X_j))$ 作为复矩阵, 实矩阵的非退化性是一致的. 故结论 4) 成立.

5) 显然, $C(\mathfrak{g}_0)^c\subseteq C(\mathfrak{g}_0^c)$. 又 $[\tau(C(\mathfrak{g}_0^c)),\ \mathfrak{g}]=\tau([C(\mathfrak{g}_0^c),\ \tau(\mathfrak{g})]=\{0\}$, 故有 $\tau(C(\mathfrak{g}_0^c))\subseteq C(\mathfrak{g}_0^c)$. 因而 $\tau^2(C(\mathfrak{g}_0^c))\subseteq\tau(C(\mathfrak{g}_0^c))\subseteq C(\mathfrak{g}_0^C)$. 即有 $\tau(C(\mathfrak{g}_0^c))=C(\mathfrak{g}_0^c)$, $\mathfrak{g}_0\cap C(\mathfrak{g}_0^c)\subseteq C(\mathfrak{g}_0)$. 故

$$
C(\mathfrak{g}_0^c)=(\mathfrak{g}_0\cap C(\mathfrak{g}_0^c))^c\subseteq C(\mathfrak{g}_0)^c\subseteq C(\mathfrak{g}_0^c).
$$

故有 $C(\mathfrak{g}_0^c)=C(\mathfrak{g}_0)^c$.

6) 若 $\mathfrak{g}_0$ 约化, 则 $\mathfrak{g}_0=C(\mathfrak{g}_0)\oplus\mathfrak{g}_0^*$, $\mathfrak{g}_0^*$ 半单. 因而 $\mathfrak{g}=g_0^c=C(\mathfrak{g}_0)^c\oplus(\mathfrak{g}_0^*)^c=C(\mathfrak{g}_0)^c\oplus(\mathfrak{g}_0^*)^c$, 而 $(\mathfrak{g}_0^*)^c$ 半单. 故 $\mathfrak{g}$ 约化.

反之, 若 $\mathfrak{g}$ 约化, 则 $\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$, $\tau(\mathfrak{g}^{(1)})=\tau([\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}])=\mathfrak{g}^{(1)}$. 故 $\mathfrak{g}^{(1)}=(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}^{(1)})^c$, $\mathfrak{g}_0=C(\mathfrak{g}_0)\oplus(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}^{(1)})$. 由 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 半单, 得 $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}^{(1)}$ 半单, 故 $\mathfrak{g}_0$ 约化. □

对于有限维线性空间的线性变换, 以下事实是熟知的.

1) 设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 V 的线性变换, 如果对 $\mathcal{A}$ 的任一不变子空间 V_1, 存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 V_2 使得 $V=V_1\dot{+}V_2$, 则称 $\mathcal{A}$ 为半单线性变换;

2) $\mathcal{A}$ 为半单线性变换当且仅当其最低多项式无重因式;

3) Euclid 空间的正交变换, 对称变换, 反对称变换等都是半单线性变换; 酉空间的酉变换等都是半单线性变换.

4) 若 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$, $\mathcal{A}$ 为半单线性变换当且仅当 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为对角矩阵.

若 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$, $\mathcal{A}$ 为半单线性变换当且仅当 $\mathcal{A}$ 作为 V^C 的线性变换是半单线性变换.

定理 3.3.3 设 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数, $\mathfrak{g}=g_0^c$ 为其复化. 则

1) $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的极大交换子代数, 当且仅当 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^c$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大交换子代数;

2) $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的交换子代数, $\forall X_0 \in \mathfrak{h}_0$, $\mathrm{ad}X_0$ 半单当且仅当 $\forall X \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}X$ 半单.

证 1) 若 $\mathfrak{h}_0$ 是交换的, 则 $\mathfrak{h}$ 也是交换的. 若 $\mathfrak{h}_0$ 不是极大交换的, 显然 $\mathfrak{h}$ 也不是极大交换的.

设 $\mathfrak{h}_0$ 是极大交换的, 又 $Z = Z_1 + \sqrt{-1}Z_2 \in \mathfrak{g}$, $Z_i \in \mathfrak{g}_0$, 满足 $[Z, \mathfrak{h}] = 0$, 注意 $\tau(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, 于是 $[\tau(Z), \mathfrak{h}] = 0$. 因此 $[Z, \mathfrak{h}] = 0$, 进而 $[Z_i, \mathfrak{h}_0] = 0$. 因此 $Z \in \mathfrak{h}$, 所以 $\mathfrak{h}$ 是极大交换的.

2) 由 $Z = Z_1 + \sqrt{-1}Z_2 \in \mathfrak{h}$, $Z_i \in \mathfrak{h}_0$, $[Z_1, Z_2] = 0$, $\mathrm{ad}Z_i$ 半单, 故 $\mathrm{ad}Z$ 半单. □

定理 3.3.4 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的极大交换子代数, 且 $\forall X \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}X$ 半单, 则

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{Z \in \mathfrak{g} | [Z, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}.$$

证 记 $\mathfrak{n} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, 易证它是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 且以 $\mathfrak{h}$ 为其理想. 于是 $\forall X \in \mathfrak{h}$, 有 $\mathrm{adX}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{h}$, 因而 $(\mathrm{ad}X)^2(\mathfrak{n}) = \{0\}$. 也就是说, $\mathrm{ad}X|_{\mathfrak{n}}$ 是幂零的, 再由 $\mathrm{ad}X$ 是半单的, 故 $\mathrm{ad}X|_{\mathfrak{n}}$ 又是半单的, 于是 $\mathrm{ad}X|_{\mathfrak{n}} = 0$, 即, $\forall Z \in \mathfrak{n}$, $[X, Z] = 0$. 由 $\mathfrak{h}$ 是极大交换的, 故 $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$. □

注 1 称 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{Z \in \mathfrak{g} | [Z, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$ 为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的**正规化子**.

注 2 定理 3.3.4 中所说子代数就是定义 1.3.2 中所说的 Cartan 子代数, 在半单李代数的情况.

3.4 紧李代数的极大交换子代数

本节讨论紧李代数对于极大交换李代数的分解.

引理 3.4.1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数, (X_0, Y_0) 是不变内积. $\mathfrak{g}_0^c = \mathfrak{g}$, τ 为对应的共轭. 则 (X_0, Y_0) 可以按下面方式扩充为 $\mathfrak{g}$ 上非退化不变对称双线性形式: 对 $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_0$ $(i = 1, 2)$, 有

$$(X_1 + \sqrt{-1}X_2,\ Y_1 + \sqrt{-1}Y_2) = (X_1, Y_1) - (X_2, Y_2) + \sqrt{-1}(X_1, Y_2) + \sqrt{-1}(X_2, Y_1).$$

对此扩充有 $(\tau X,\ \tau Y) = \overline{(X,\ Y)}$.

证 此引理的证明是容易的. □

下面用 (X, Y) 来表示 (X_0, Y_0) 的扩充.

定理 3.4.1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数, $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个极大交换子代数, $\mathfrak{g} = g_0^c$, $\mathfrak{h} = h_0^c$. 则有

1) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大交换子代数, 且 $\forall X \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}X$ 是半单的;

2) $\mathfrak{g}$ 有子空间直和分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, 其中 $\Delta \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$, $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | [h, X] = \alpha(h)X, \forall h \in \mathfrak{h}\}$;

3)　$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha]\subseteq\mathfrak{g}_\alpha$, $[\mathfrak{g}_\beta,\mathfrak{g}_\alpha]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h}$;

4)　$(\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_\beta)=0,\ \alpha,\ \beta\in\Delta,\ \alpha\neq-\beta$;

5)　$(h,\ e_\alpha)=0,\ \forall h\in\mathfrak{h},\ e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha\in\Delta$;

6)　(X,Y) 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制是非退化的.

证　1)　因为 $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}_0$, $(\mathrm{ad}X(Y),Z)+(Y,\mathrm{ad}X(Z))=0$, 所以 $\mathrm{ad}X$ 是反对称变换, 因而是半单的. 于是由定理 3.3.3, 知结论 1) 成立.

2)　由于 $\mathfrak{h}$ 是极大交换子代数, 又 $\forall h\in\mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}h$ 是半单的, 于是有 $\mathfrak{g}$ 的基, 使得 $\mathrm{ad}h$ 在此基下的矩阵均为对角矩阵. 再由 $\mathfrak{h}$ 是极大交换子代数, 故结论 2) 成立.

3)　设 $h\in\mathfrak{h}$, $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $Z\in\mathfrak{g}_\beta$, 于是

$$
\begin{aligned}
&[h,X]=\alpha(h)X,\\
&[h,[X,Z]]=[[h,X],Z]+[X,[h,Z]]=(\alpha+\beta)(h)[X,Z],\\
&[h,[X,Y]]=[[h,X],Y]+[X,[h,Y]]=0,
\end{aligned}
$$

因此结论 3) 成立.

4)　任取 $h\in\mathfrak{h}$, $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $e_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$, 则有 $([h,\ e_\alpha],\ e_\beta)+(e_\beta,\ [h,\ e_\beta])=0$. 因而有 $(\alpha+\beta)(h)(e_\alpha,\ e_\beta)=0$. 注意 $\alpha\neq-\beta$, 即 $\alpha+\beta\neq0$. 故有 $h\in\mathfrak{h}$, 使 $(\alpha+\beta)(h)\neq0$. 因而有 $(e_\alpha,\ e_\beta)=0$.

5)　任取 $h,h_1\in\mathfrak{h}$, $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, 则有 $([h,\ e_\alpha],\ h_1)+(e_\beta,\ [h,\ h_1])=0$, 因而 $\alpha(h)(e_\alpha,h_1)=0$, 于是 $(e_\alpha,h_1)=0$.

6)　由 (X,Y) 的非退化性及结论 5), 知结论 6) 成立. □

注 1　Δ 称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**根系**, 其中元素称为**根**.

注 2　在证明结论 1) 时, 已经得到结论: 紧李代数的元素都是半单的.

注 3　进一步还可得到: 紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型 $B(X,Y)$ 是半负定的, 而且 $B(X,Y)$ 负定当且仅当 $\mathfrak{g}_0$ 是紧半单的.

事实上, $\forall X\in\mathfrak{g}_0$, $\mathrm{ad}X$ 对于 $\mathfrak{g}_0$ 的不变内积, 是反对称变换, 因而其特征值为纯虚数或零, 于是 $B(X,X)\leqslant0$, 故 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型 $B(X,Y)$ 是半负定的. 进一步知 $B(X,X)=0$, 当且仅当 $\mathrm{ad}X=0$, 即 $X\in C(\mathfrak{g}_0)$. 于是结论成立.

由于 $(X,\ Y)$ 在 $\mathfrak{h}$ 上亦非退化. 设 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 为基, 因而 $A=((h_i,h_j))$ 为可逆对称矩阵. 对 $\alpha\in\Delta$, 令

$$B=(\alpha(h_1),\alpha(h_2),\cdots,\alpha(h_n))'.$$

于是有唯一的 $\alpha^*\in\mathfrak{h}$, 使得

$$\mathrm{crd}(\alpha^*;h_1,h_2,\cdots,h_n)=A^{-1}B,$$

由此有

$$\alpha(h)=(\alpha^*,\ h),\quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

以后仍以 α 记 α^*, 因此, 我们已把 Δ 嵌入 $\mathfrak{h}$ 中.

定理 3.4.2 设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数. $(X_0,\ Y_0)$ 是不变内积, $(X,\ Y)$ 是其在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^c$ 上的扩充. $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大交换子代数, $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^c$. 又 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$, α 表示 $\mathfrak{h}$ 上线性函数, 也表示用 $(X,\ Y)$ 在 $\mathfrak{h}$ 中的嵌入. 则有以下结论:

1) $\forall\alpha\in\Delta$, $h_0\in\mathfrak{h}_0$, $\alpha(h_0)$ 为纯虚数或零, 即 $\alpha\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 以后也将 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 记为 $\mathfrak{h}_R$;

2) $[h,\ e_\alpha]=(\alpha,\ h)e_\alpha,\quad \forall e_\alpha\in\mathfrak{g},\ \alpha\in\Delta$;

3) $\tau(\alpha)=-\alpha,\ \tau\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{-\alpha}$;

4) $[e_\alpha,\ e_{-\alpha}]=(e_\alpha,\ e_{-\alpha})\alpha,\quad \forall e_{\pm\alpha}\in\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$;

5) 对 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $e_\alpha\neq 0$, 在 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 中可取 $e_{-\alpha}$ 满足 $(e_\alpha,\ e_{-\alpha})=1$;

6) $\forall\alpha\in\Delta$, $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$;

7) 在 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ 中可取 $e_{\pm\alpha}$, 使得 $(e_\alpha,\ e_{-\alpha})=1$, $\tau e_\alpha=e_{-\alpha}$. 设 $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\ \beta}e_{\alpha+\beta}$, 则 $\overline{N_{\alpha\beta}}=N_{-\alpha\ -\beta}$.

证 1) 因为 $\forall X\in\mathfrak{g}_0$, $\mathrm{ad}X$ 是反对称变换, 故其特征值为纯虚数或零, 自然 $\alpha(h_0)$ 为纯虚数或零. 于是结论 1) 成立.

2) 因为 $[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha$, 于是由将 α 嵌入 $\mathfrak{h}$ 的方式知结论 2) 成立.

3) 由 $\alpha\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 于是 $\tau(\alpha)=-\alpha$. 又设 $h\in\mathfrak{h}$, $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, 注意

$$\begin{aligned}[h,\tau(X)]&=[\tau^2(h),\tau(X)]=\tau([\tau(h),X])=\tau(\alpha(\tau(h))X)\\ &=\overline{(\alpha,\tau(h))}\tau(X)=(\tau(\alpha),\tau^2(h))\tau(X)=-\alpha(h)\tau(X).\end{aligned}$$

于是结论 2) 成立.

4) 只要注意, $[e_\alpha,e_{-\alpha}]\in\mathfrak{h}$, 而且 $\forall h\in\mathfrak{h}$ 有

$$\begin{aligned}(h,[e_\alpha,e_{-\alpha}]-(e_\alpha,e_{-\alpha})\alpha)&=(h,[e_\alpha,e_{-\alpha}])-(e_\alpha,e_{-\alpha})\alpha(h)\\ &=([h,e_\alpha],e_{-\alpha})-(e_\alpha,e_{-\alpha})\alpha(h)=0,\end{aligned}$$

就可得到结论 4).

5) 由于 $(\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\alpha)=0$; $\beta\neq\alpha$ 时, $(\mathfrak{g}_\beta,\mathfrak{g}_\alpha)=0$, 以及 (X,Y) 的非退化性, 知结论 5) 成立.

6) 取 $e_{\pm\alpha}\in\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ 使得 $(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$, 于是由结论 4) 知 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha$.

若 $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$, 则有 $e \in \mathfrak{g}_\alpha$, 且 $\forall k \in \mathbf{C}$, $e \neq k e_\alpha$. 令 $e'_\alpha = -(e, e_{-\alpha})e_\alpha + e$, 则有

$$\begin{cases} e'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \\ e'_\alpha \neq k e_\alpha, \quad \forall k \in \mathbf{C}, \\ (e_{-\alpha}, e'_\alpha) = -(e, e_{-\alpha}) + (e_{-\alpha}, e) = 0. \end{cases}$$

令 $e_n = (\mathrm{ad} e_\alpha)^n e'_\alpha$. 于是 $e_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$. 注意

$$[e_{-\alpha}, e_1] = [e_{-\alpha}, [e_\alpha, e'_\alpha]] = [[e_{-\alpha}, e_\alpha], e'_\alpha] + [e_\alpha, [e_{-\alpha}, e'_\alpha]]$$

$$= [-\alpha, e'_\alpha] = -(\alpha, \alpha)e'_\alpha = -\frac{1}{2} \times (1+1) \times 1 \times (\alpha, \alpha) e_0 \neq 0.$$

如果已有 $[e_{-\alpha}, e_n] = -\dfrac{1}{2} n(n+1)(\alpha, \alpha) e_{n-1} \neq 0$, 则有 $e_n \neq 0$, 且

$$[e_{-\alpha}, e_{n+1}] = [e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_n]] = [[e_{-\alpha}, e_\alpha], e_n] + [e_\alpha, [e_{-\alpha}, e_n]]$$

$$= [-\alpha, e_n] - \frac{1}{2} n(n+1)(\alpha, \alpha)[e_\alpha, e_{n-1}] = -\frac{1}{2}(n+1)(n+2) e_n \neq 0.$$

于是 $e_{n+1} \neq 0$. 由此知, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n\alpha \in \Delta$. 故 Δ 是无限集. 但是 $\dim \mathfrak{g} < \infty$, 于是结论 6) 成立.

7) 设 $\alpha \in \Delta$, $e'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $e'_\alpha \neq 0$. 于是 $\tau(e'_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. 自然 $e'_\alpha + \tau(e'_\alpha) \in \mathfrak{g}_0$. 故有

$$0 < (e'_\alpha + \tau(e'_\alpha),\ e'_\alpha + \tau(e'_\alpha)) = 2(e'_\alpha,\ \tau(e'_\alpha)) = c.$$

取 $e_\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{c}} e'_\alpha$, $e_{-\alpha} = \tau(e_\alpha)$. 则有

$$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \left(\sqrt{\frac{2}{c}} e'_\alpha, \tau\left(\sqrt{\frac{2}{c}} e'_\alpha \right) \right) = \frac{2}{c}(e'_\alpha,\ \tau(e'_\alpha)) = 1,$$

而且 $\tau(e_{-\alpha}) = \tau(\tau(e_\alpha)) = e_\alpha = e_{-(-\alpha)}$. 所以从 $[e_\alpha,\ e_\beta] = N_{\alpha\,\beta} e_{\alpha+\beta}$, $[e_{-\alpha},\ e_{-\beta}] = N_{-\alpha\,-\beta} e_{-\alpha-\beta}$, 立即可得

$$N_{-\alpha\,-\beta} e_{-\alpha-\beta} = [e_{-\alpha},\ e_{-\beta}] = [\tau(e_\alpha),\ \tau(e_\beta)]$$
$$= \tau([e_\alpha,\ e_\beta]) = \tau(N_{\alpha\,\beta} e_{\alpha+\beta}) = \overline{N_{\alpha\,\beta}} \tau(e_{\alpha+\beta}) = \overline{N_{\alpha\,\beta}} e_{-\alpha-\beta}.$$

故有 $N_{-\alpha\,-\beta} = \overline{N_{\alpha\,\beta}}$. □

注　满足 7) 中这些条件的 $\{e_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 称为 **Weyl 基**.

定义 3.4.1 设 $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, p, q 是非负整数, 使得

$$\{\beta + k\alpha | -p \leqslant k \leqslant q\} \subseteq \Delta \cup \{0\},$$

而 $\beta - (p+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, $\beta + (q+1)\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, 则称

$$\beta - p\alpha,\ \cdots,\ \beta - \alpha,\ \beta,\ \beta + \alpha,\ \cdots,\ \beta + q\alpha,$$

为通过 β 的 α **链**. 若上面的 $\Delta \cup \{0\}$ 均改为 Δ, 则称为通过 β 的 α **根链**.

定理 3.4.3 设

$$\beta - p\alpha,\ \cdots,\ \beta - \alpha,\ \beta,\ \beta + \alpha,\ \cdots,\ \beta + q\alpha,$$

为通过 β 的 α 链. 则有以下结果:

1) $\dfrac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)} = p - q$, 而且当 $k > q$ 或 $k < -p$ 时, $\beta + k\alpha \notin \Delta$;

2) 若 $\alpha, \beta \in \Delta$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$, 则 $\alpha + \beta \notin \Delta$;

3) 若 $\alpha \in \Delta$, $k \in \mathbf{C}$, 则 $k\alpha \in \Delta$ 当且仅当 $k = \pm 1$;

4) $|N_{\alpha\beta}|^2 = \dfrac{q(p+1)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\ \sqrt{-1}\alpha)$.

证 1) 由 $e_\alpha, e_{-\alpha}, \alpha$ 生成一个 3 维单李代数 $\mathfrak{g}_1$. 再令 $V = \sum\limits_{k=-p}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$. 又有

$$\begin{aligned}
&[e_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}] = \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}, && -p \leqslant k \leqslant q-1,\\
&[e_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+q\alpha}] = \{0\}, &&\\
&[e_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}] = \mathfrak{g}_{\beta+(k-1)\alpha}, && -p+1 \leqslant k \leqslant q,\\
&[e_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta-p\alpha}] = \{0\}, &&\\
&[\alpha, e_{\beta+k\alpha}] = (\alpha, \beta+k\alpha)e_{\beta+k\alpha}, && -p \leqslant k \leqslant q.
\end{aligned}$$

由此得到 $\mathfrak{g}_1$ 的表示 (ρ, V) , 这里 $\rho(X) = \mathrm{ad}X|_V$. 注意到 $\alpha = (e_\alpha, e_{-\alpha})[e_\alpha, e_{-\alpha}]$, 因此 $\mathrm{tr}\rho(\alpha) = 0$. 另一方面,

$$\mathrm{tr}\rho(\alpha) = \sum_{k=-p}^{q} (\alpha, \beta + k\alpha) = (p+q+1)\left((\alpha, \beta) + \frac{1}{2}(q-p)(\alpha, \alpha)\right),$$

于是 $\dfrac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)} = p - q$.

由于 Δ 是有限集, 故有 $q' = \max\{k|\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}\}$, $q' \geqslant q$.

若 $q' > q$, 考虑过 $\beta_1 = \beta + q'\alpha$ 的 α 链 $\{\beta_1 + l\alpha | -p_0 \leqslant l \leqslant q_0\}$. 由 q' 的取法, 有 $q_0 = 0$, 又 $\beta + q\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, 于是 $q' - p_0 > q + 1$, 即 $p_0 < q' - q - 1$. 另一方面,

又有

$$p_0 = p_0 - q_0 = \frac{2(\alpha,\ \beta_1)}{(\alpha,\ \alpha)} = \frac{2(\alpha,\ \beta + q'\alpha)}{(\alpha,\ \alpha)} = p - q + 2q' < q' - q - 1.$$

于是 $q' < -p - 1$, 这是不可能的. 故 $q' = q$, 即 $k > q$ 时, $\beta + k\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. 同理, $k < p$ 时, $\beta + k\alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. 故结论 1) 成立.

2) 如在结论 1) 的论证中所说, $\mathfrak{g}$ 的子空间 $V_1 = \sum\limits_{k=-p}^{0} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ 也在 $\mathfrak{g}_1$ 作用下不变, 于是可得 $\dfrac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)} = p$. 因此 $q = 0$. 于是结论 2) 成立.

3) 由结论 2) 及 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$ 知 $2\alpha \notin \Delta$, 于是 $\forall k \in \mathbf{N}$, $k > 2$, $k\alpha \notin \Delta$, $-k\alpha \notin \Delta$. 即结论 3) 对于 $k \in \mathbf{Z}$ 成立.

设 $k \notin \mathbf{Z}$, 而 $k\alpha \in \Delta$. 再设过 $k\alpha$ 的 α 链为

$$\{(k + k_1)\alpha | k_1 = -p, -(p-1), \cdots, 0, 1, \cdots, q\}.$$

于是

$$k = \frac{(k\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{1}{2}(p - q).$$

由 $k \notin \mathbf{Z}$, 于是 $k = n_1 + \dfrac{1}{2}$, $n_1 \in \mathbf{Z}$.

若 $n_1 = 0$, 则 $\dfrac{1}{2}\alpha = \alpha_1 \in \Delta$.

故设 $n_1 \neq 0$. 由 $k\alpha \in \Delta$, 故

$$-k\alpha = (k - 2k)\alpha = k\alpha - (2n_1 + 1)\alpha \in \Delta.$$

当 $n_1 > 0$ 时, 有

$$-p \leqslant -(2n_1 + 1) < -(n_1 + 1) < 0 \leqslant q.$$

于是 $k\alpha - (n_1 + 1) = -\dfrac{1}{2}\alpha \in \Delta$. 从而 $\dfrac{1}{2}\alpha = \alpha_1 \in \Delta$.

当 $n_1 < 0$ 时, 有

$$-p \leqslant 0 \leqslant -(n_1 + 1) < -(2n_1 + 1) \leqslant q.$$

亦有 $\dfrac{1}{2}\alpha = \alpha_1 \in \Delta$.

于是得到 $\alpha = 2\alpha_1 \notin \Delta$, 矛盾. 故结论 3) 成立.

4) 首先用归纳法证明

$$(\mathrm{ad}e_{-\alpha}\mathrm{ad}e_\alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha} = \frac{1}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha}. \tag{1}$$

注意到 $(\alpha,\ \beta)=\dfrac{1}{2}(p-q)(\alpha,\ \alpha)$, 于是

$$\mathrm{ad}e_{-\alpha}\mathrm{ad}e_{\alpha}=\mathrm{ad}([e_{-\alpha},\ e_{\alpha}])+\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha}=-\mathrm{ad}\alpha+\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha}.$$

在 $k=0$ 时, 有

$$(\mathrm{ad}e_{-\alpha}\ \mathrm{ad}e_{\alpha})e_{\beta-p\alpha}=-(\alpha,\ \beta-p\alpha)e_{\beta-p\alpha}=(p(\alpha,\ \alpha)-\frac{1}{2}(p-q)(\alpha,\ \alpha))e_{\beta-p\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}(p+q)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta-p\alpha},$$

因而公式 (1) 成立. 设 k 成立. 现证 $k+1$ 时公式 (1) 亦成立.

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}e_{-\alpha}\mathrm{ad}e_{\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}=(-\mathrm{ad}\alpha+\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=-(\alpha,\ \beta+(k+1-p)\alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}+(\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=(-(k+1-p)+\frac{1}{2}(q-p))(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}+(\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=(\frac{1}{2}(p+q)-k-1)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}+(\mathrm{ad}e_{\alpha}\mathrm{ad}e_{-\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}.\end{aligned}$$

注意到 $\dim\mathfrak{g}_{\beta+(k+1-p)\alpha}=1$. 因而有 $e_{\beta+(k+1-p)\alpha}=\mu(\mathrm{ad}e_{\alpha})e_{\beta+(k-p)\alpha}$. 因此, 由归纳假设, 有

$$(\mathrm{ad}e_{-\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}=\mu\mathrm{ad}e_{-\alpha}e_{\beta+(k-p)\alpha}=\mu\frac{1}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha}.$$

所以有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}e_{-\alpha}\mathrm{ad}e_{\alpha})e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=\left(\frac{1}{2}(p+q)-k-1\right)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&\quad+(\mathrm{ad}e_{\alpha})\frac{\mu}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha}\\&=\left[\frac{1}{2}(p+q)-k-1+\frac{1}{2}(k+1)(p+q-k)\right](\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=\frac{1}{2}(k+2)(p+q-k-1)(\alpha,\ \alpha)e_{\beta+(k+1-p)\alpha}.\end{aligned}$$

故公式 (1) 成立.

注意到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}e_{-\alpha}\mathrm{ad}e_{\alpha})e_{\beta+(k-p)\alpha}=\mathrm{ad}e_{-\alpha}N_{\alpha\,\beta+(k-p)\alpha}e_{\beta+(k+1-p)\alpha}\\&=N_{\alpha\,\beta+(k-p)\alpha}N_{-\alpha\,\beta+(k+1-p)\alpha}e_{\beta+(k-p)\alpha},\end{aligned}$$

即有 $N_{\alpha\beta+(k-p)\alpha}N_{-\alpha\,\beta+(k+1-p)\alpha}=\dfrac{1}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\ \alpha)$. 取 $k=p$, 得 $N_{\alpha\,\beta}N_{-\alpha\,\alpha+\beta}=\dfrac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\ \alpha)$. 再由 $([e_{-\alpha},\ e_{\alpha+\beta}],\ e_{-\beta})+(e_{\alpha+\beta},\ [e_{-\alpha},\ e_{-\beta}])=0$, 得 $N_{-\alpha\,\alpha+\beta}=-N_{-\alpha\,-\beta}$. 于是结论 4) 成立. □

3.5 素 根 系

本节继续上节的讨论. 记 $\mathfrak{h}_0$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ 分别为它们的复化, $\mathfrak{h}_R$, Δ 等亦如上节所定义.

定义 3.5.1 记 $\mathfrak{h}_0$ 为紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数, Δ 是由 $\mathfrak{h}_0$ 及不变内积决定的根系. 则 $\mathfrak{h}_0$ 中元素 X_0 称为**正则元**, 如果 $(\alpha,\ \sqrt{-1}X_0)\neq 0$, $\forall\alpha\in\Delta$. 否则称为**非正则元**.

设 X_0 为 $\mathfrak{h}_0$ 中正则元, 若 $\sqrt{-1}X\in\mathfrak{h}_R$, 使得 $(\sqrt{-1}X,\ \sqrt{-1}X_0)>0((\sqrt{-1}X,\ \sqrt{-1}X_0)<0)$, 则称 $\sqrt{-1}X$ 为**正向量** (**负向量**), 记为 $\sqrt{-1}X>0$ ($\sqrt{-1}X<0$).

显然, 有以下结论:

1) X_0 为正则元, 则对任何非零实数 a, aX_0 亦为正则元;

2) $a>0$, aX_0 与 X_0 确定的正 (负) 向量是一致的; $a<0$, aX_0 与 X_0 确定的正 (负) 向量是相反的;

3) 正 (负) 向量的和为正 (负) 向量; 正 (负) 向量与正数之积为正 (负) 向量; 正 (负) 向量与负数之积为负 (正) 向量;

4) 若 $\sqrt{-1}X\in\mathfrak{h}_R$, $\sqrt{-1}X\neq 0$. 于是 $X\in\mathfrak{h}_0$, 因此 $(\sqrt{-1}X,\sqrt{-1}X)=-(X,X)<0$.

定义 3.5.2 设 X_0 为 $\mathfrak{h}_0$ 中正则元, $\alpha\in\Delta$. 若 $\alpha>0$ (<0), 则称 α 为**正根** (**负根**). 所有正根的集合称为**正根系**, 记为 Δ_+. 所有负根的集合称为**负根系**, 记为 Δ_-.

若一个正根不能写成两个正根的和, 则称为**素根**. 所有素根的集合称为**素根系**, 记为 Π.

定理 3.5.1 设 $\Delta_\pm$, $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 分别为正负根系, 素根系. 则有以下结论:

1) $\Delta_+\cap\Delta_-=\varnothing$, $\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$, $\Delta_-=-\Delta_+$;

2) 若 $\alpha\in\Delta_+$, 则有不全为零的非负整数 n_i, 使得 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$;

3) 设 $\alpha_i,\alpha_j\in\Pi$, 且 $\alpha_i\neq\alpha_j$. 则 $(\alpha_i,\alpha_j)\geqslant 0$;

4) Π 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基;

5) 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\in\Delta$; $\forall\alpha\in\Delta$, 有不全为零的非负整数 n_i, 使得 $\alpha=\pm\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\beta_i$, 则有 $\mathfrak{h}_0$ 的正则元 Y_0, 使得由其定义的素根系为 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\}$.

证 由正, 负根及素根的定义知 1), 2) 成立.

3) 首先指出, 由 $\alpha_j=\alpha_i+(\alpha_j-\alpha_i)$ 及 $\alpha_i=\alpha_j+(\alpha_i-\alpha_j)$, 知 $\alpha_i-\alpha_j\notin\Delta$. 于是过 α_i 的 α_j 链为 $\alpha_i,\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_i+q\alpha_j$, $q\geqslant 0$. 因此 $(\alpha_i,\alpha_j)=-\dfrac{1}{2}q(\alpha_j,\alpha_j)\geqslant 0$.

4) 首先证明 Π 是线性无关的. 由 $\alpha_1>0$, 可设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关, 若 α_{p+1} 可被它们线性表示, 即有

$$\alpha_{p+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_p\alpha_p,\quad x_1,x_2,\cdots,x_p\in\mathbf{R}.$$

令 $Y=\sum\limits_{x_i>0}x_i\alpha_i$, $Z=\sum\limits_{x_j<0}x_j\alpha_j$. 由 $\alpha_{p+1}>0$, 知 $Y\neq 0$, 且 $\alpha_{p+1}=Y+Z$. 注意

$$(Y,\alpha_{p+1})=(Y,Y)+(Y,Z)=(Y,Y)+\sum_{x_i>0}\sum_{x_j<0}x_ix_j(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant(Y,Y)<0.$$

另有, $(Y,\alpha_{p+1})=\sum\limits_{x_i>0}x_i(\alpha_i,\alpha_{p+1})\geqslant 0$. 这就产生矛盾. 于是 Π 线性无关.

若 Π 生成的子空间为 $\mathfrak{h}_1\neq\mathfrak{h}_R$, 则 $\mathfrak{h}_1$ 在 $\mathfrak{h}_R$ 中的正交补 $\mathfrak{h}_2\neq\{0\}$. 于是 $C(\mathfrak{g}_0)\supseteq\sqrt{-1}\mathfrak{h}_2$, 这与 $\mathfrak{g}_0$ 半单矛盾. 因此 Π 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基.

5) 由条件知 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\}$ 生成的子空间为 $\mathfrak{h}_R$, 且 $l=|\Pi|=\dim\mathfrak{h}_R$. 于是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 为 $\mathfrak{h}_R$ 的基, $\sqrt{-1}\beta_1,\sqrt{-1}\beta_2,\cdots,\sqrt{-1}\beta_l$ 为 $\mathfrak{h}_0$ 的基. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_l>0$, 于是有唯一的 $Y_0\in\mathfrak{h}_0$ 满足

$$(\sqrt{-1}\beta_i,Y_0)=b_i,\quad 1\leqslant i\leqslant l.$$

由 $(\sqrt{-1}\alpha,Y_0)=\pm\sum\limits_{i=1}^{l}n_i(\sqrt{-1}\beta_i,Y_0)=\pm\sum\limits_{i=1}^{n}n_ib_i\neq 0$, 知 Y_0 为正则元. 而且 $\alpha=\pm\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\beta_i$ 分别为正根, 负根, 于是 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\}$ 为素根系. □

注 1 若在 $\mathfrak{h}_R$ 中取定一组基, 可按这组基的字典序, 也可决定正方向及 Δ_+, Π. 同时有 $\mathfrak{h}_0$ 的正则元 X_0, 使得在 $\mathfrak{h}_R$ 中按上述方法得到的素根系恰为 Π.

注 2 在 $\mathfrak{h}_R$ 中由 Killing 型知 $B(X,Y)=-(X,Y)$ 是正定的. 因此 $\mathfrak{h}_R$ 成为 Euclid 空间. 将 (X,Y) 代之以 $B(X,Y)$, $B(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0$. 其他结果仍然相同.

注 3 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为素根系, $\alpha\in\Delta$, 于是在 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$ 中的 n_i 是唯一确定的, 称 $\mathrm{ht}\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}n_i$ 为 α 的**高度**.

定理 3.5.2　设 $\Delta_{\pm}, \Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 分别为正负根系、素根系. 则有以下结果:

1) $\alpha_i,\alpha_j\in\Pi, \alpha_i\neq\alpha_j, -3\leqslant\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\leqslant 0$, 且 $(\alpha_i,\alpha_j)\neq 0$ 时, $a_{ji}=\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$, $a_{ij}=\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$ 中至少有一个为 -1;

2) $\alpha\in\Delta_+$, 则在 Δ_+ 中有序列:

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}+\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}=\alpha.$$

3) $\mathfrak{g}$ 由 $\Pi, e_{\pm\alpha_i}$ $(1\leqslant i\leqslant l)$ 生成, 且满足

$$\begin{cases}[\alpha_i,\alpha_j]=0, & 1\leqslant i,j\leqslant l,\\ [\alpha_j,e_{\pm\alpha_i}]=\pm(\alpha_j,\alpha_i)e_{\pm\alpha_i}, & 1\leqslant i\leqslant l,\\ [e_{\alpha_i},e_{-\alpha_j}]=\delta_{ij}\alpha_i, & 1\leqslant i,j\leqslant l,\\ (\mathrm{ad}e_{\alpha_i})^{1-a_{ij}}e_{\alpha_j}=0, & 1\leqslant i,j\leqslant l,\\ (\mathrm{ad}e_{-\alpha_i})^{1-a_{ij}}e_{-\alpha_j}=0, & 1\leqslant i,j\leqslant l.\end{cases}$$

4) 矩阵 $A=(a_{ij})\left(a_{ij}=\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right)$ 满足

$$\begin{cases}a_{ii}=2, & 1\leqslant i\leqslant l,\\ a_{ij}\in\mathbf{Z}, a_{ij}\leqslant 0, & i\neq j,\\ a_{ij}=0, & \text{当且仅当 } a_{ji}=0,\\ A\binom{i_1\ i_2\ \cdots\ i_k}{i_1\ i_2\ \cdots\ i_k}>0, & 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant l, 1\leqslant k\leqslant l.\end{cases}$$

此矩阵称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 矩阵**.

证　1) 由定理 3.5.1 的结论 3) 及其证明知, 过 α_i 的 α_j 链为 $\alpha_i,\alpha_i+\alpha_j,\cdots$, $\alpha_i+(-a_{ij})\alpha_j$, 故 $a_{ij}\in\mathbf{Z}$, $a_{ij}\leqslant 0$. 同样 $a_{ji}\in\mathbf{Z}$, $a_{ij}\leqslant 0$.

再注意 $-(X,Y)$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的内积, 故 $(\alpha_i,\alpha_j)^2\leqslant(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)$, 且等号成立当且仅当 $\alpha_j=k\alpha_i$. 由定理 3.4.3 的结论 3), 知 $k=\pm 1$. 但是 α_i, α_j 均为正根, 于是 $k=1$. 因此 $\alpha_i\neq\alpha_j$ 时,

$$a_{ij}a_{ji}=\frac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)}<4.$$

由此知结论 1) 成立.

2) 只要证明当 $\alpha\in\Delta_+\setminus\Pi$ 时, 有 $\alpha_i\in\Pi$, 使得 $\alpha-\alpha_i\in\Delta_+$. 如果 $\forall 1\leqslant j\leqslant l$, $(\alpha,\alpha_j)\geqslant 0$, 那么由定理 3.5.1 结论 4) 的证明方法, 可得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\alpha$ 线性无关,

这是不可能的. 于是有 α_i, 使得 $(\alpha,\alpha_i)<0$. 设过 α 的 α_i 链为 $\alpha+k\alpha_i$, $-p\leqslant k\leqslant q$, 于是

$$\frac{2(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=p-q>0.$$

因此 $p\neq 0$, $\alpha-\alpha_i\in\Delta$. 再由 $\alpha\in\Delta_+\setminus\Pi$, 可得 $\alpha-\alpha_i\in\Delta_+$.

3) 由于 Π 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基, 从而也是 $\mathfrak{h}$ 的基. 由结论 2), 有

$$\mathfrak{g}_\alpha=[\mathfrak{g}_{\pm\alpha_{i_k}},[\cdots[\mathfrak{g}_{\pm\alpha_{i_2}},\mathfrak{g}_{\pm\alpha_{i_1}}]\cdots]].$$

于是 $\mathfrak{g}$ 由 Π, $e_{\pm\alpha_i}$ $(1\leqslant i\leqslant l)$ 生成.

由定理 3.4.2, 及 $\pm(\alpha_j+(1-a_{ij})\alpha_i)\notin\Delta$, 知结论 3) 成立.

4) 由结论 1), A 满足前三个所述条件. 令

$$D=\operatorname{diag}\left(\frac{-(\alpha_1,\alpha_1)}{2},\frac{-(\alpha_2,\alpha_2)}{2},\cdots,\frac{-(\alpha_l,\alpha_l)}{2}\right).$$

于是 $AD=-((\alpha_i,\alpha_j))$ 为正定矩阵, 因此最后的关系也成立. □

定义 3.5.3 在平面上用 l 个点表示 α_1, α_2, $\cdots$, α_l. 将 α_i 与 α_j 用 $a_{ij}a_{ji}$ 条线连接, $\dfrac{a_{ij}}{a_{ji}}=\dfrac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=2$ 或 3 时, 再在连接线上画一个指向 α_j 的箭头,

$a_{ij}=a_{ji}=0:$ $\overset{\alpha_i}{\circ}$ $\overset{\alpha_j}{\circ}$

$a_{ij}=a_{ji}=-1:$ $\overset{\alpha_i}{\circ}$ —— $\overset{\alpha_j}{\circ}$

$a_{ij}=-1, a_{ji}=-2:$ $\overset{\alpha_i}{\circ}\Longleftarrow\overset{\alpha_j}{\circ}$

$a_{ij}=-1, a_{ji}=-3:$ $\overset{\alpha_i}{\circ}\Lleftarrow\overset{\alpha_j}{\circ}$

如此得到的图, 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Dynkin** 图.

定理 3.5.3 设 Π 为 $\mathfrak{g}$ 的素根系.

1) 若有 $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$, $(\Pi_1,\Pi_2)=0$, 则有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$;

2) 若 Π 不能如上分解, 则 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

证 1) 设 $\Pi_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k_1}\}$, $\Pi_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k_2}\}$. 故 $(\alpha_i,\beta_j)=0$, $1\leqslant i\leqslant k_1$, $1\leqslant j\leqslant k_2$.

首先对根的高度归纳证明, $\alpha\in\Delta$, 则 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{k_1}n_i\alpha_i$ 或 $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{k_2}m_j\beta_j$.

不妨设 $\alpha\in\Delta_+$. $\mathrm{ht}\alpha=1$, 显然结论成立. 若 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{k_1}n_i\alpha_i$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k_1}n_i=n-1$. 注意 $\alpha-\beta_j\notin\Delta$, 又由 $(\alpha,\beta_j)=0$, 知 $\alpha+\beta_j\notin\Delta$. 同样, 若 $\alpha=\sum\limits_{j=1}^{k_2}m_j\beta_j$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{k_2}m_j=n-1$. 注意 $\alpha-\alpha_i\notin\Delta$, 又由 $(\alpha,\alpha_i)=0$, 知 $\alpha+\alpha_i\notin\Delta$.

由上面结论, 令 $\Delta_1 = \left\{\alpha \in \Delta \middle| \alpha = \sum_{i=1}^{k_1} n_i\alpha_i\right\}$, $\Delta_2 = \left\{\beta \in \Delta \middle| \beta = \sum_{j=1}^{k_2} m_j\beta_j\right\}$. 立即可得: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$; $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$; $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$, $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$. 设 $\mathfrak{h}_i$ 为 Π_i 生成的 $\mathfrak{h}$ 的子空间, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \sum_{\alpha\in\Delta_i} \mathfrak{g}_\alpha$, $i = 1, 2$. 则有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

2) 我们分成几步来证明.

第一步, 给出不能分解的条件.

设 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$. 在 Π 中定义关系 $\sim$ 如下: $\alpha_i \sim \alpha_j$, 如有 $\alpha_i = \alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \cdots, \alpha_{k_t} = \alpha_j$ 使得 $(\alpha_{k_s}, \alpha_{k_{s+1}}) \neq 0, 1 \leqslant s \leqslant t-1$. 容易证明 $\sim$ 是等价关系; 而且若 Π_1, Π_2 是不同的等价类, 当且仅当 $(\Pi_1, \Pi_2) = 0$. 于是 Π 不能分解为两个正交子集之并, 即 Π 对上述等价关系只有一类.

第二步, 证明若 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零理想, $X \in \mathfrak{a}$, $X \neq 0$. 于是有

$$X = h + x_1e_{\beta_1} + x_2e_{\beta_2} + \cdots + x_ne_{\beta_n}, \quad \beta_i \neq \beta_j,\ e_{\beta_i} \in \mathfrak{g}_{\beta_i}, e_{\beta_i} \neq 0,$$

则 $h, x_1e_{\beta_1}, x_2e_{\beta_2}, \cdots, x_ne_{\beta_n} \in \mathfrak{a}$.

在 $\mathfrak{h}$ 中取 h_0 使得 $\beta_i(h_0) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $\beta_i(h_0) \neq \beta_j(h_0)$, $i \neq j$. 于是 $\forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $(\mathrm{ad}h_0)^kX = X_k \in \mathfrak{a}$. 特别地,

$$\left\{\begin{array}{l} h + x_1e_{\beta_1} + x_2e_{\beta_2} + \cdots + x_ne_{\beta_n} = X \in \mathfrak{a}, \\ 0h + \beta_1(h_0)x_1e_{\beta_1} + \beta_2(h_0)x_2e_{\beta_2} + \cdots + \beta_n(h_0)x_ne_{\beta_n} = X_1 \in \mathfrak{a}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0^nh + \beta_1(h_0)^nx_1e_{\beta_1} + \beta_2(h_0)^nx_2e_{\beta_2} + \cdots + \beta_n(h_0)^nx_ne_{\beta_n} = X_n \in \mathfrak{a}, \end{array}\right.,$$

注意

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \beta_1(h_0) & \cdots & \beta_n(h_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_1(h_0)^n & \cdots & \beta_n(h_0)^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是 $h, x_1e_{\beta_1}, x_2e_{\beta_2}, \cdots, x_ne_{\beta_n} \in \mathfrak{a}$.

第三步, 证明 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$. 若 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 则 $X = h \neq 0$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$. 若有 $x_i \neq 0$, 则 $e_{\beta_i} \in \mathfrak{a}$, 于是 $[e_{\beta_i}, e_{-\beta_i}] \neq 0$, $[e_{\beta_i}, e_{-\beta_i}] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$.

最后, 证明 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. 取 $h \neq 0$, $h \in \mathfrak{a}$. 于是有 $\alpha_i \in \Pi$, $\alpha_i(h) \neq 0$. 因此

$$e_{\alpha_i} = \alpha_i(h)^{-1}[h, e_{\alpha_i}] \in \mathfrak{a}, \quad \alpha_i = [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}] \in \mathfrak{a}.$$

若 $(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$, 则 $e_{\alpha_j} = (\alpha_i, \alpha_j)^{-1}[\alpha_i, e_{\alpha_j}] \in \mathfrak{a}$, 从而 $\alpha_j \in \mathfrak{a}$. 于是由 Π 的不可分解知, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{a}$, 进而 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. 故 $\mathfrak{g}$ 是单李代数. □

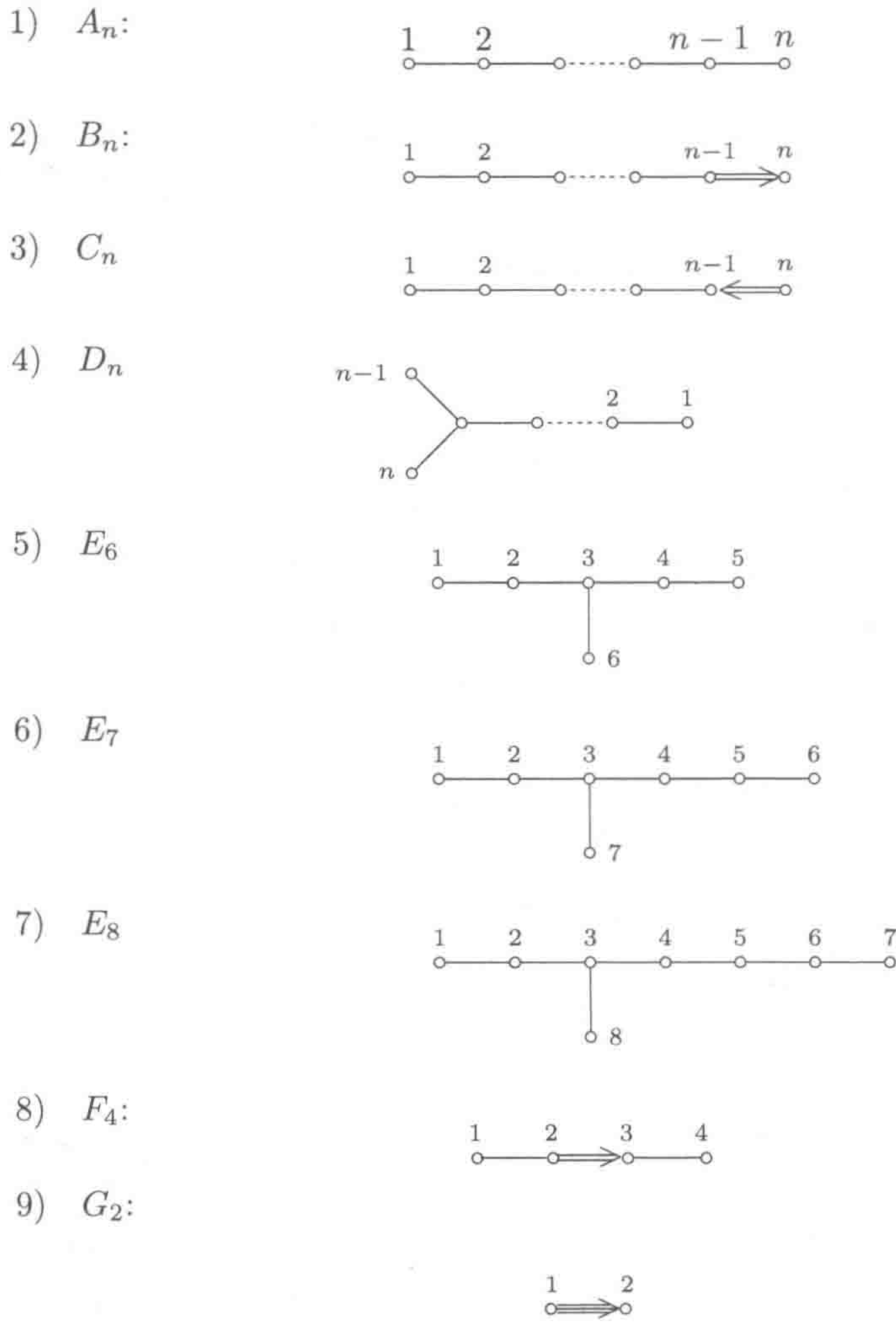
推论 1 $\mathfrak{g}$ 为 (有限维) 单李代数当且仅当其 Dynkin 图是连通的.

推论 2 $\mathfrak{g}$ 为 (有限维) 单李代数当且仅当其 Cartan 矩阵 A 是不可分解.

所谓 A 可分解, 即有置换矩阵 P, 使得 $PAP' = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$ 为准对角矩阵.

这是定理 5.3.3 的自然结果.

可以证明复单李代数的 Dynkin 图有且只能有以下情形 (例如参见文献 [2]):



A_n, B_n, C_n, D_n 分别是 $sl(n+1, \mathbf{C})$, $so(2n+1, \mathbf{C})$, $sp(n, \mathbf{C})$, $so(2n, \mathbf{C})$ 的图, 这些单李代数称为**典型单李代数**

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 所对应的李代数称为**例外单李代数**. 例外单李代数的存在性及其实现可参看文献 [2].

单李代数的 Cartan 矩阵如下:

$$A_n:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_n:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_n:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_n:\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & -1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2:\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F_4:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8:\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

E_6, E_7 的 Cartan 矩阵分别从 E_8 的 Cartan 矩阵去掉第 6, 7 两行与第 6,7 两列, 第 7 行与第 7 列而得.

例 3.5.1　$su(n+1)^c = sl(n+1,\mathbf{C})$ 有 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) | \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i = 0\}$, 且 $\Pi = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \alpha_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}\}$. $i \neq j$ 时, $\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = -\delta_{|i-j|\,1}$. 于是对应 Dynkin 图为 A_n, 这是单李代数.

前面所知要得到素根系或 Dynkin 图需要先给出极大交换子代数或 Cartan 子代数, 然后要给出正向或正则元. 如果 Cartan 子代数不一样, 或者 Cartan 子代数一样, 而正则元不同, 会对 Dynkin 图产生什么影响?

此外一个问题是: 两个复半单李代数在什么情况下有相同的 Dynkin 图? 此问题的回答是, 它们是同构的. 其证明可参见文献 [2].

我们先看正则元与素根系之间的关系.

定义 3.5.4 $\mathfrak{h}_0$ 中正则元素集 (必为开集)

$$\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha,\ \sqrt{-1}X_0) = 0\}$$

的连通分支, 称为**Weyl 房**.

以后记 $\mathfrak{h}_\alpha^0 = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha,\ \sqrt{-1}X_0) = 0\}$.

注 也可以在 $\mathfrak{h}_R$ 中定义 Weyl 房, 相应的讨论是一样的. 李代数的书中常用 $\mathfrak{h}_R$ 中的 Weyl 房.

定理 3.5.4 设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数, Δ 是对应的根系. 则

1) 对应一个素根系 $\Pi = \{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}, \Omega_\Pi = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_0) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant l\}$ 是非空的连通开凸集;

2) Ω_Π 是 $\mathfrak{h}_0$ 的一个 Weyl 房, 任何 Weyl 房均有这种形式. 即 Weyl 房与素根系有一一对应.

证 1) 由定理 3.5.1 结论 5) 的证明已知 $\Omega_\Pi \neq \varnothing$. 显然 Ω_Π 是开集. 设 $X_1,\ X_2 \in \Omega_\Pi$. 于是

$$(\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_1) > 0, \quad (\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_2) > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant l.$$

$\mathfrak{h}_0$ 中连接 X_1 与 X_2 的线为 $\mu X_1 + (1-\mu)X_2,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1$. 于是有

$$(\alpha_i,\ \sqrt{-1}(\mu X_1 + (1-\mu)X_2)) = \mu(\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_1) + (1-\mu)(\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_2) > 0.$$

因而 $\mu X_1 + (1-\mu)X_2 \in \Omega_\Pi$, 于是 Ω_Π 是连通凸集.

2) 对任一 $X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha^0$, 依据定理 3.5.1, 可决定 Δ 中一素根系 $\Pi = \{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$, 使得 $(\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_0) > 0, 1 \leqslant i \leqslant l$. 因而 $X_0 \in \Omega_\Pi$. 即有 $\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha^0 \subseteq \bigcup\limits_{\Pi} \Omega_\Pi$.

反之, $X_0 \in \Omega_\Pi$. 于是 $(\alpha_i,\ \sqrt{-1}X_0) > 0$, 因而 $(\alpha,\ \sqrt{-1}X_0) \neq 0,\ \forall \alpha \in \Delta$. 故 $X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha^0$. 于是 $\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha^0 = \bigcup\limits_{\Pi} \Omega_\Pi$.

又若有两个素根系 $\Pi' \neq \Pi$. 于是 $\Delta'_+ \neq \Delta_+$, 因而 $\Pi \not\subseteq \Delta'_+$. 有 $\alpha_{i_0} \in \Pi \cap \Delta'_-$, 即 $\Omega_{\Pi'} \cap \Omega_\Pi = \varnothing$, 故 Ω_Π 是 Weyl 房. 所以 Ω_Π 与 Π 是一一对应. □

例 3.5.2 $A_2, \Delta = \{\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$. 其素根系有

$$\Pi_1 = \{\alpha_1,\ \alpha_2\}, \qquad \Pi_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2,\ -\alpha_1\}, \quad \Pi_3 = \{\alpha_2,\ -\alpha_1 - \alpha_2\},$$
$$\Pi_4 = \{-\alpha_1,\ -\alpha_2\}, \quad \Pi_5 = \{-\alpha_1 - \alpha_2,\ \alpha_1\}, \quad \Pi_6 = \{-\alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2\}.$$

习　题

1. 给出 A_2, B_2, C_2 与 G_2 的一个素根系 Π.
2. 给出 A_2, B_2, C_2 与 G_2 的 Weyl 房 Ω_π.
3. 用平面图表示 A_2, B_2, C_2 与 G_2 的 Weyl 房.

3.6　实紧李群的 Cartan 子群的共轭性

实紧李群的 Cartan 子群的共轭性可以导出实紧李代数的 Cartan 子代数的共轭性. 因而对应李代数对不同 Cartan 子代数的分解所得根系是“相同”的.

定义 3.6.1　实紧李群 G_0 的极大连通交换子群 H_0 称为 G_0 的**Cartan 子群**.

例 3.6.1　$SO(2m, \mathbf{R})$ 是实紧李群. $H = \left\{\mathrm{diag}(A_1, A_2\cdots, A_m)\middle| A_i = \begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\right\}$ 是 $SO(2m,\mathbf{R})$ 的 Cartan 子群.

事实上, H 显然是交换的.

由 $O(2,\mathbf{R}) = SO(2,\mathbf{R})\cup\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}SO(2,\mathbf{R})$, 知 $B\in O(2,\mathbf{R})$, 满足 $AB = BA$, $\forall A\in SO(2,\mathbf{R})$ 当且仅当 $B\in SO(2,\mathbf{R})$.

设 $B = (B_{ij}) \in SO(2m,\mathbf{R})$, B_{ij} 为 2 阶矩阵, 满足 $\forall A\in H$, $AB = BA$. $i\neq j$ 时, 取 $A_i = I_2$, $A_j = -I_2$, 则有 $B_{ij} = -B_{ij}$, 故 $B_{ij} = 0$. 于是 $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_m)$, $B_i\in O(2,\mathbf{R})$, 且 $B_iA_i = A_iB_i$, $\forall A_i\in SO(2,\mathbf{R})$. 于是 $B\in H$, 即 H 是极大交换的.

又设 $tX = \mathrm{diag}(tX_1, tX_2\cdots, tX_m)$, 其中 $X_i = \begin{pmatrix}0 & -\theta_i\\ \theta_i & 0\end{pmatrix}$, 则有 e^{tX} 是 H 的单参数子群, 且 $e^{0X} = I_{2m}$, $e^X = A$. 故知 H 是连通的. 因而 H 为 Cartan 子群.

$SO(2m,\mathbf{R})$ 中任何元素共轭于 (相似于)H 中的元素. exp: $so(2m,\mathbf{R}) \longrightarrow SO(2m,\mathbf{R})$ 是满的.

$SO(2m+1,\mathbf{R})$ 是实紧李群. $H = \left\{\mathrm{diag}(1, A_1, A_2\cdots, A_m)\middle| A_i = \begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\right\}$ 是 $SO(2m+1,\mathbf{R})$ 的 Cartan 子群.

$SO(2m+1,\mathbf{R})$ 中任何元素共轭于 (相似于)H 中的元素. $\exp: so(2m+1,\mathbf{R}) \to SO(2m+1,\mathbf{R})$ 是满的.

$U(n) = \{A\in GL(n,\mathbf{C})| A\bar{A}' = I_n\}$, $SU(n) = \{A\in U(n)|\det A = 1\}$ 是紧李群.

因为 $U(n)$, $SU(n)$ 是 $GL(n,\mathbf{C})$ 的伪代数群, 故为闭子群, 因而是李群. 又从

$$\operatorname{tr}(A\bar{A}')=\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{ent}_{ij}A\overline{\operatorname{ent}_{ij}A}=n,$$

知 $U(n)$, $SU(n)$ 是有界的, 故是紧李群.

$H=\{A=\operatorname{diag}(a_1,a_2\cdots,a_n)|a_i\overline{a_i}=1,1\leqslant i\leqslant n\}$, $H_1=\{A\in H|a_1a_2\cdots a_n=1\}$

分别是 $U(n)$, $SU(n)$ 的 Cartan 子群.

事实上, H, H_1 显然是极大交换的. 又 $a_i\overline{a_i}=1$, 故 $a_i=e^{\sqrt{-1}\theta_i}$, 令 $X=\operatorname{diag}(\sqrt{-1}\theta_1,\sqrt{-1}\theta_i,\cdots,\sqrt{-1}\theta_n)$, 则 e^{tX} 是连接 I_n 与 A 的单参数子群. 故 H,H_1 分别为 $U(n)$, $SU(n)$ 的 Cartan 子群.

$U(n)$, $SU(n)$ 中任何元素共轭于 (相似于)H, H_1 中的元素. exp 分别是 $u(n)$, $su(n)$ 到 $U(n)$, $SU(n)$ 的满映射.

例 3.6.2 设 $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$. 则 $Sp(n)=\{A\in\mathbf{C}^{2n\times 2n}|A\overline{A}'=I_{2n},AJA'=J\}$ 是 $U(2n)$ 的闭子群, 因而是紧李群, 称为(**紧**) **辛群**.

$$H=\{\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\cdots,\overline{\lambda_n})\,|\,\lambda_i=e^{\sqrt{-1}\theta_i},\ \theta_i\in\mathbf{R},1\leqslant i\leqslant n,\}$$

是 $Sp(n)$ 的交换子群. 可取 $\lambda_i,\overline{\lambda_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 互不相等. 于是与 H 中所有元素交换的元素 D 是对角矩阵, 设 $D=\operatorname{diag}(D_1,D_2)$, D_1,D_2 是 n 阶对角矩阵. 由 $DJD'=DJD=J$, 可得 $D_2=D_1^{-1}$, 因此 D 亦在 H 中, 故 H 是 $Sp(n)$ 的 Cartan 子群.

设 $A\in Sp(n)$, 则存在 $P\in Sp(n)$, 使得 $P^{-1}AP\in H$.

事实上, 在复线性空间 $\mathbf{C}^{2n}$ 中定义内积 $(\alpha,\beta)=\alpha'\bar{\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{C}^{2n})$, $\mathbf{C}^{2n}$ 为酉空间. 将 A, J 都看成 $\mathbf{C}^{2n}$ 的线性变换. 由于 $\overline{A}'=A^{-1}$, $\overline{J}'=-J$, 因此 A 是酉变换. 我们证明有标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\cdots,\alpha_{2n}$ 满足

$$A\alpha_k=\lambda_k\alpha_k,\quad A\alpha_{n+k}=\overline{\lambda_k}\alpha_{n+k},\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

由于 A 是酉变换, 故有 $\lambda_i=e^{\sqrt{-1}\theta_i}$, $\theta_i\in\mathbf{R},1\leqslant i\leqslant n$, 且

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\cdots,\alpha_{2n})\in SP(n,\mathbf{C}).$$

设 λ_1 是 A 的特征值, α_1 是一个对应的单位特征向量. $\alpha_1\in\mathbf{C}^{2n}$, 于是 $\overline{\alpha_1}\in\mathbf{C}^{2n}$. 令 $\alpha_{n+1}=-J(\overline{\alpha_1})$. 注意 $AJA'=J$, 即 $AJ=J\overline{A}$, 于是

$$A(\alpha_{n+1})=-AJ(\overline{\alpha_1})=-J\overline{A}(\overline{\alpha_1})=\overline{\lambda_1}(-J(\overline{\alpha_1}))=\overline{\lambda_1}\alpha_{n+1};$$

$$(\alpha_1,\alpha_{n+1})=(\alpha_1,-J(\overline{\alpha_1}))=(\alpha_1)'\overline{-J(\overline{\alpha_1})}=-(\alpha_1)'J\alpha_1=0;$$

$$(\alpha_{n+1},\alpha_{n+1})=(-J(\overline{\alpha_1}))'\overline{(-J(\overline{\alpha_1})}=(\overline{\alpha_1})'J(-J)\alpha_1=(\overline{\alpha_1})'\alpha_1=1.$$

设已有单位正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots, \alpha_{n+k}$ 满足

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, \quad A\alpha_{n+i} = \overline{\lambda_i}\alpha_{n+i}, \quad \alpha_{n+i} = -J(\overline{\alpha_i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

它们生成的子空间 W 及其正交补 $W^{\perp}$ 都是 A 的不变子空间.

在 $W^{\perp}$ 中有 A 的单位特征向量 α_{k+1}, 对应特征值 λ_{k+1}. 则 $\alpha_{n+k+1} = -J(\overline{\alpha_{k+1}})$ 是 A 的对应于特征值 $\overline{\lambda_{k+1}}$ 的单位特征向量, 且与 α_{k+1} 正交.

由于 $\alpha_{n+i} = -J(\overline{\alpha_i})$, $(-J)^2 = -I_{2n}$, $\overline{J} = J$, 于是有 $\alpha_i = -J(\overline{\alpha_{n+i}})$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant k$, 有

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_{n+k+1}) &= \alpha_i'\overline{(-J(\overline{\alpha_{k+1}}))} = -\alpha_i' J(\alpha_{k+1}) = (J\alpha_i)'\alpha_{k+1} \\ &= -\alpha_{k+1}'\overline{J(\overline{\alpha_i})} = -(\alpha_{k+1}, \alpha_{n+i}) = 0; \\ (\alpha_{n+i}, \alpha_{n+k+1}) &= (-J(\overline{\alpha_i}))'\overline{(-J(\overline{\alpha_{k+1}}))} = (\overline{\alpha_i})'\alpha_{k+1} = (\alpha_{k+1}, \alpha_i) = 0.\end{aligned}$$

于是 $P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n}) \in U(2n)$. 又

$$JP = (J\alpha_1, \cdots, J\alpha_n, J\alpha_{n+1}, \cdots, J\alpha_{2n}) = P'(-\overline{\alpha_{n+1}}, \cdots, -\overline{\alpha_{2n}}, \overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_n}),$$

因此

$$P'JP = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \\ \alpha_{n+1}' \\ \vdots \\ \alpha_{2n}' \end{pmatrix} (-\overline{\alpha_{n+1}}, \cdots, -\overline{\alpha_{2n}}, \overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_n}) = J.$$

于是 $P \in SP(n, \mathbf{C})$ 这就说明了 $Sp(n)$ 中任何元素共轭于 (相似于)H 中的元素.

引理 3.6.1　实紧李群 G_0 的 Cartan 子群 H_0 是紧子群, 故为环面. 且 H_0 的李代数 $\mathfrak{h}_0 = \mathrm{Lie}H_0$ 是 G_0 的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. 又若 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的任一 Cartan 子代数, 则 $\exp\mathfrak{h}_0 = H_0$ 为 G_0 的 Cartan 子群. 指数映射 $\exp: \mathfrak{h}_0 \to H_0$ 是通用覆盖映射即 $(\exp, \mathfrak{h}_0)$ 是 H_0 的通用覆盖群.

证　设 H_0 的闭包为 $\overline{H_0}$, 设 $g \in \overline{H_0}$. 因而有 $g_n \in H_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. 又因 H_0 可换, $\forall h_k \in H_0$, 有 $h_k g h_k^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} h_k g_n h_k^{-1} = g$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = h$, 则有 $hgh^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} h_k g h_k^{-1} = g$, 于是 $\overline{H_0}$ 可换. H_0 连通, 故 $\overline{H_0}$ 亦连通. 由 H_0 之极大性, 可知 $H_0 = \overline{H_0}$. 即 H_0 闭, 因而紧, 且为环面.

显然, $\mathfrak{h}_0 = \mathrm{Lie}H_0$ 是可换的. 若非极大可换李子代数, 则有可换李子代数 $\mathfrak{h}_1 \supsetneqq \mathfrak{h}_0$. 于是 $\exp\mathfrak{h}_1$ 生成 G_0 的连通可换李群. 因而 $\exp\mathfrak{h}_1 \supsetneqq H_0$, 这与 H_0 的极大性矛盾. 故 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的极大交换李子代数, 即 Cartan 子代数.

显然, $\exp\mathfrak{h}_0$ 为可换连通李子群. $\overline{\exp\mathfrak{h}_0}$ 亦为可换连通李子群. $\overline{\exp\mathfrak{h}_0}$ 的李代数是可换的, 故必为 $\mathfrak{h}_0$. 因而有 $\overline{\exp\mathfrak{h}_0} = \exp\mathfrak{h}_0$. 若另外有连通可交换李子群 $H_0' \supsetneqq \exp\mathfrak{h}_0$, 则 $\mathrm{Lie}H_0' \supsetneqq \mathfrak{h}_0$, $\mathrm{Lie}H_0'$ 可换, 与 $\mathfrak{h}_0$ 为 Cartan 子代数矛盾. 故 $\exp\mathfrak{h}_0 = H_0$.

最后, 由 $\mathfrak{h}_0$ 可换, 故有 $\exp(X_1+X_2) = \exp X_1 \exp X_2$, 因而 exp 是 $\mathfrak{h}_0$ 到 H_0 上的群同态. 又 $\mathfrak{h}_0$ 作为李群其李代数同构于 $\mathfrak{h}_0$, 即 H_0 的李代数. 故 exp 又是局部同构. 而 $\mathfrak{h}_0$ 又连通且单连通. 这就表明 $(\exp, \mathfrak{h}_0)$ 是 H_0 的通用覆盖群. □

显然, 若 H_0 是 G_0 的 Cartan 子群, 则对任何 $A \in \mathrm{Aut}G_0$, $A(H_0)$ 亦为 Cartan 子群.

定理 3.6.1 设 G_0 为实连通紧李群, H_0 为它的 Cartan 子群. 则 H_0 的正规化子 $N(H_0)$ 为紧李子群. 而且 $N(H_0)$ 的单位分支 $N(H_0)^0 = H_0$. 因而 $\mathrm{Lie}N(H_0) = \mathrm{Lie}H_0$.

证 因为 $\overline{H_0} = H_0$. 设 $g_0 \in \overline{N(H_0)}$, 因而有序列 $\{g_n\} \subset N(H_0)$ 使 $g_n \to g_0$. $\forall t \in H_0$, 自然有 $g_n t g_n^{-1} \in H_0$, 而 $g_n t g_n^{-1} \to g_0 t g_0^{-1}$. 因而有 $g_0 t g_0^{-1} \in \overline{H_0} = H_0$. 这就证明了 $g_0 \in N(H_0)$. 故 $N(H_0)$ 是紧李子群. 由 $N(H_0)$ 紧, 故 $N(H_0)^0$ 紧. 自然 $H_0 \subseteq N(H_0)^0$.

设 $N(H_0)$ 的李代数为 $\mathfrak{n}_0$. 于是对 $X \in \mathfrak{n}_0$, $X_0 \in \mathfrak{h}_0$, 有 $\mathrm{adexp}tX \exp X_0 \in H_0$. 而

$$(\mathrm{ad}\exp tX)\exp X_0 = \exp(\mathrm{Ad}\exp tX)X_0 = \exp e^{\mathrm{ad}tX}X_0 \in H_0,$$

因而 $e^{\mathrm{ad}tX}X_0 \in \mathfrak{h}_0$. 故 $(\mathrm{ad}X)X_0 \in \mathfrak{h}_0$, 即 $\mathfrak{n}_0 = N_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$. 因而 $\mathrm{Lie}N(H_0)^0 = \mathfrak{n}_0$, $N(H_0)^0 = H_0$. □

定义 3.6.2 设 G 是李群, G 的李代数为 $\mathfrak{g}$, 称 g_1, $g_2 \in G$ 为共轭的. 若有 $g \in G$, 使得 $(\mathrm{ad}g)g_1 = g_2$.

X_1, $X_2 \in \mathfrak{g}$ 称为**共轭的**, 若存在 $g \in G$, 使得 $(\mathrm{Ad}g)X_1 = X_2$.

显然, X_1, $X_2 \in \mathfrak{g}$ 共轭, 当且仅当 $\exp tX_1$ 与 $\exp tX_2$ 共轭.

定理 3.6.2 设 G 是李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$. 又 $g \in G$, $C(g)$ 为 g 在 G 中的中心化子. 则 $C(g)$ 是 G 的闭子群, 且其李代数 $\mathrm{Lie}C(g) = \{X \in \mathfrak{g} | (\mathrm{Ad}g)X = X\}$. 又若 $A \in \mathrm{Aut}G$, 则 $C(Ag) = AC(g)$.

证 设 $g_n \in C(g)$, $g_n \to g_0$. 即 $(\mathrm{ad}g)g_n = g_n$. 于是有 $(\mathrm{ad}g)g_0 = g_0$, 即 $g_0 \in C(g)$. 故 $C(g)$ 为闭子群.

设 $X \in \mathrm{Lie}C(g)$, 故 $\forall t \in \mathbf{R}$, $\exp tX \in C(g)$. 故 $\mathrm{ad}g\exp tX = \exp t(\mathrm{Ad}g)X = \exp tX$, 因而 $(\mathrm{Ad}g)X = X$, $\mathrm{Lie}C(g) = \{X \in \mathfrak{g} | (\mathrm{Ad}g)X = X\}$.

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}G$, 则 $gg_1 = g_1 g$ 当且仅当 $\mathcal{A}(g_1)\mathcal{A}(g) = \mathcal{A}(g_1)\mathcal{A}(g)$. 因而 $C(\mathcal{A}(g)) = \mathcal{A}C(g)$. □

定义 3.6.3　$g \in G$, 若 $C(g)^0$ ($C(g)$ 的单位连通分支) 可交换, 则称 g 为**正则元素**; 否则称 g 为**非正则元素**.

显然, 正则元素的共轭元素为正则元素.

定理 3.6.3　设 H_0 是 G 的 Cartan 子群. $\mathrm{Lie}H_0 = \mathfrak{h}_0$. 令

$$H_\alpha = \{g = \exp X_0 \in H_0 | X_0 \in \mathfrak{h}_0, e^{(\alpha, X_0)} = 1\},$$
$$\mathfrak{h}_\alpha^k = \{X \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha, X) = 2k\pi\sqrt{-1}\},$$
$$\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha^0 = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha, X_0) = 0\}.$$

对于 $g_0 = \exp X_0 \in H_0$, ($X_0 \in \mathfrak{h}_0$) 下面条件是等价的:

1)　g_0 正则;

2)　$C(g_0)^0 = H_0$;

3)　$\mathfrak{h}_0 = \{X \in \mathfrak{g}_0 | (\mathrm{Ad}g_0)X = X\}$;

4)　$e^{(\alpha,\ X_0)} \neq 1$, $\forall \alpha \in \Delta$;

5)　$X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha^k$.

证　因为 H_0 可换连通, 故 $H_0 \subseteq C(g_0)^0$. 若 g_0 正则, 则 $C(g_0)^0$ 可换. 由 H_0 的极大交换性知 $H_0 = C(g_0)^0$. 因而 $\mathfrak{h}_0 = \mathrm{Lie}C(\mathfrak{g}_0)^0$.

反之, g_0 非正则, 则 $C(g_0)^0$ 不可换, 而 H_0 可换. 即 $H_0 \subsetneqq C(g_0)^0$, 故 $\mathfrak{h}_0 \subsetneqq C(g_0)^0$. 这就证明了 1), 2), 3) 的等价性.

又由于 $\mathrm{Ad}g_0 = \mathrm{Ad}(\exp X_0) = e^{\mathrm{ad}X_0}$, 因而 $\mathrm{Ad}g_0$ 的特征根为 1 与 $e^{(\alpha,\ X_0)}$ ($\alpha \in \Delta$). 因而若

$$\{X \in \mathfrak{g}_0 | (\mathrm{Ad}g_0)X = X\} = \mathfrak{h}_0,$$

则 $\mathrm{Ad}g_0$ 的特征根 1 的重数为 $\dim \mathfrak{h}_0$, 因而 $\forall \alpha \in \Delta$, $e^{(\alpha,\ X_0)} \neq 1$. 即 $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \Delta$, $(\alpha,\ X_0) \neq 2k\pi\sqrt{-1}$. 即 $X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha^k$.

若 $\{X \in \mathfrak{g}_0 | (\mathrm{Ad}g_0)X = X\} \supsetneqq \mathfrak{h}_0$, 则 $\mathrm{Ad}g_0$ 的特征根 1 的重数大于 $\dim \mathfrak{h}_0$. 故 $\exists \alpha \in \Delta$, 使得 $e^{(\alpha,\ X_0)} = 1$, 即 $(\alpha,\ X_0) = 2k\pi\sqrt{-1}$. 因而 $X_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha^k$. 这样就证明了定理. □

定理 3.6.4　令 $H_\alpha = \{g = \exp X_0 \in H_0 | X_0 \in \mathfrak{h}_0, e^{(\alpha, X_0)} = 1\}$. 则

1)　$\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} H_\alpha = \left\{\exp X_0 | X_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha^k\right\}$ 为 H_0 中所有非正则元素的集合;

2)　H_α 为 H_0 的闭子群, 且 $\mathrm{Lie}H_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha^0$;

3)　H_0 中正则元集 $H_0 \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} H_\alpha$ 为 H_0 中开集.

证　事实上, 1) 是定理 3.6.3 的直接结果. 若 2) 成立了, 则 3) 自然成立. 现论证 2) 如下:

若 $X_1, X_2 \in H_0$, $\exp X_1, \exp X_2 \in H_\alpha$, 则 $(\exp X_1)(\exp X_2)^{-1} = \exp(X_1 - X_2) \in H_0$, 且 $e^{(\alpha, X_1 - X_2)} = e^{(\alpha, X_1) - (\alpha, X_2)} = e^{(\alpha, X_1)}e^{-(\alpha, X_2)} = 1$. 于是 $(\exp X_1)(\exp X_2)^{-1} \in H_\alpha$. H_α 为 H_0 中子群.

若 $g_n = \exp X_n \longrightarrow g_0 = \exp X_0$, 则有 $g_n \in H_\alpha$, $e^{(X_n, \alpha)} = 1$. 于是 $e^{(X_0, \alpha)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(X_n, \alpha)} = 1$, 故 $g_0 \in H_\alpha$, H_α 是闭集.

又 $X \in \mathrm{Lie}H_\alpha$, 当且仅当 $\forall t \in \mathbf{R}$, $\exp tX \in H_\alpha$, 当且仅当 $e^{(tX, \alpha)} = 1$, 当且仅当 $(X, \alpha) = 0$. 故 $\mathrm{Lie}H_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha^0 = \mathfrak{h}_\alpha$. □

下面着手共轭性定理的证明. 为简便, 令 $H_0' = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$, $H_0'' = H_0 \setminus H_0'$.

记 $G_0 \times H_0$ 到 H_0 中的映射 φ: $\varphi(g_0, t_0) = \mathrm{ad}g_0(t_0) = g_0 t_0 g_0^{-1}$. 记 $S = \varphi(G_0 \times H_0')$, $T = \varphi(G_0 \times H_0'')$. 显然, 有 $S \cap T = \varnothing$, $S = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \varphi(G_0 \times H_\alpha)$.

引理 3.6.2　*$\varphi(G_0 \times H_\alpha)$ 在 G_0 的一个 $\dim G_0 - 3$ 维的子流形中. 因而 $G_0 \setminus S$ 是 G_0 的连通子集.*

证　若 $g_1, g_2 \in G_0$, $\forall t_\alpha \in H_\alpha$, 有 $\varphi(g_1, t_\alpha) = \varphi(g_2, t_\alpha)$, 即有 $\mathrm{ad}(g_1^{-1}g_2)t_\alpha = t_\alpha$. 即 $g_1^{-1}g_2 \in C_{G_0}(H_\alpha)$. 由 H_α 为闭集, 故 $C_{G_0}(H_\alpha)$ 亦为闭集. 令 π 为 G_0 到 $G_0/C_{G_0}(H_\alpha)$ 的自然映射. 于是 φ 在 $(G_0/C_{G_0}(H_\alpha)) \times H_\alpha$ 上诱导的映射

$$\bar\varphi(gC_{G_0}(H_\alpha),\ t_\alpha) = g t_\alpha g^{-1},$$

满足

$$\varphi = \bar\varphi \cdot (\pi \times \mathrm{id}).$$

$$\begin{array}{ccc} G_0\times H_\alpha & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \bigcup\limits_{g\in G_0}(\mathrm{ad}g)H_\alpha \\ {\scriptstyle \pi\times\mathrm{id}}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \bar\varphi} & \\ (G_0/C_{G_0}(H_\alpha))\times H_\alpha & & \end{array}$$

即右图交换.

用第三类坐标系容易验证 $\bar\varphi$ 是解析的.

由于 $\mathrm{Lie}C_{G_0}(H_\alpha) = C_{\mathfrak{g}_0}(\mathrm{Lie}H_\alpha) = C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_\alpha)$, 而 $\mathfrak{h}_\alpha = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 | (X_0, \alpha) = 0\}$. 故 $\dim\mathfrak{h}_\alpha = \dim\mathfrak{h}_0 - 1$. 于是有 $[\mathfrak{h}_\alpha, e_{\pm\alpha}] = (\pm\alpha, \mathfrak{h}_\alpha)e_{\pm\alpha} = 0$. 因而 $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \mathfrak{h}_0 \subseteq C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_\alpha)$, 及 $\dim C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_\alpha) \geqslant \dim\mathfrak{h}_0 + 2$. 故

$$\begin{aligned} &\dim(G_0/C_{G_0}(H_\alpha) \times H_\alpha) = \dim G_0 - \dim C_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_\alpha) + \dim\mathfrak{h}_\alpha \\ \leqslant\ &\dim G_0 - (\dim\mathfrak{h}_0 + 2) + \dim\mathfrak{h}_0 - 1 = \dim G_0 - 3. \end{aligned}$$

故 $\varphi(G_0 \times H_\alpha)$ 在 G_0 的一个 $\dim G_0 - 3$ 维子流形中. 于是 $G_0 \setminus S$ 连通. □

引理 3.6.3　*$\varphi: G_0 \times H_0 \to G_0$ 定义如上. 分别以 $T_{g_0}(G_0), T_{t_0}(H_0), T_{(\mathrm{ad}g_0)t_0}(G_0)$ 表示流形 G_0, H_0, G_0 分别在 g_0, t_0, $(\mathrm{ad}g_0)t_0$ 处的切空间. 则*

$$d\varphi(T_{g_0}(G_0) \times T_{t_0}(H_0)) = T_{(\mathrm{ad}g_0)t_0}(G_0),$$

当且仅当 t_0 为正则元, 即 $t_0 \in H_0''$.

证 令 $\varphi_0 = L_{t_0^{-1}} \cdot \mathrm{ad}g_0^{-1} \cdot \varphi$, 于是 $\varphi_0(g_0, t_0) = e$. 取 $t = t_0, g = g_0 \exp sX_e$. $X_e \in \mathfrak{g}_0$. 于是有

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(g_0 \exp sX_e, t_0) &= t_0^{-1}(\mathrm{ad}g_0^{-1}\mathrm{ad}(g_0 \exp sX_e))t_0 \\
&= t_0^{-1}(\mathrm{ad}\exp sX_e)t_0 = t_0^{-1}\exp sX_e t_0 \exp(-sX_e) \\
&= (\exp s(\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e)\exp(-sX_e) \\
&= \exp(s[(\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e - X_e] + o(s)).
\end{aligned}
$$

而 $g = g_0 \exp sX_e = L_{g_0}(\exp sX_e) = \exp sdL_{g_0}X_e$. 因而有 $d\varphi_0(s(dL_{g_0})X_e, 0) = s[(\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e - X_e] + o(s)$, 即有 $d\varphi_0(dL_{g_0}X_e, 0) = (\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e - X_e$. 再取 $g = g_0$, $t = t_0 \exp s(X_0)_e$, $X_0 \in \mathfrak{h}_0$, 则

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(g_0, t_0 \exp s(X_0)_e) = t_0^{-1}\mathrm{ad}g_0^{-1}\mathrm{ad}g_0(t_0 \exp s(X_0)_e) = \exp s(X_0)_e, \\
&t = L_{t_0}\exp s(X_0)_e = \exp sdL_{t_0}(X_0)_e,
\end{aligned}
$$

故 $d\varphi_0(0, sdL_{t_0}(X_0)_e) = s(X_0)_e$. 又 $dL_gX_e = X_g$, $dL_{t_0}(X_0)_e = (X_0)_{t_0}$, 故有

$$
d\varphi_0(X_{g_0}, (X_0)_{t_0}) = d\varphi_0(X_{g_0}, 0) + d\varphi_0(0, (X_0)_{t_0}) = (\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e - X_e + (X_e)_e.
$$

又 $\varphi = \mathrm{ad}g_0 L_{t_0}\varphi_0$, 所以 $d\varphi = \mathrm{Ad}g_0 \cdot dL_{t_0} \cdot d\varphi_0$,

$$
d\varphi(X_{g_0}, (X_0)_{t_0}) = \mathrm{Ad}g_0 dt_0((\mathrm{Ad}t_0^{-1})X_e - X_e + (X_0)_e).
$$

令 $\mathfrak{m}_e = (\mathrm{Ad}t_0^{-1} - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_0})\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h}_0$. 于是 $d\varphi$ 是满映射当且仅当 $\mathfrak{m}_e = \mathfrak{g}_0$. 即对 $t_0 \in H_0$, $A_0 \in \mathfrak{h}_0$, $t_0 = \exp A_0$, 有 $\mathrm{Ad}t_0^{-1} = \mathrm{Ad}\exp A_0 = e^{-\mathrm{ad}A_0}$.

对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 对 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 的根子空间分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, 对 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 有 $(\mathrm{Ad}t_0^{-1} - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_0})e_\alpha = (e^{-(\alpha, A_0)} - 1)e_\alpha$. 于是 $\mathfrak{m}_e = \mathfrak{g}_0$ 当且仅当 $e^{-(\alpha, A_0)} \neq 1, \forall\, \alpha \in \Delta$. 即 t_0 正则. □

定理 3.6.5 设 G_0 是实连通紧李群, H_0 为 G_0 的一个 Cartan 子群, 则 $G_0 = \bigcup\limits_{g \in G_0} \mathrm{ad}gH_0$. 即 G_0 的任一元素都与 H_0 中元素共轭.

证 符号如前面所约定, 只要证明 $S \cup T = G_0$ 即可. 由 $S \cap T = \varnothing$, 故 $T \subseteq G_0 \backslash S$. 又从引理 3.6.2 知 $G_0 \setminus S$ 连通. 故只要证明 T 又开又闭即可.

首先证明 T 是 G_0 的开集. 由引理 3.6.3 知, 对 $t \in T$, 又有 $(\mathrm{ad}g_0)t_0 = t$, 则 $d\varphi(T_{g_0}(G_0) \times T_{t_0}(H_0)) = T_t(G_0)$, 则有 $T_{t_0}(H_0) = T_{t_0}(H_0'')$, H_0'' 为 H_0 中开集. 故 $\dim T_t(T) = \dim G_0$. 则有 $T_t(T) = T_t(G_0)$. $T_t(G_0)$ 与 G_0 是局部同胚的, $T_{g_0}(G_0) \times T_{t_0}(H_0'')$ 是与 $G_0 \times H_0''$ 局部同胚的. 故有 $U_{g_0} \subset G_0, V_{t_0} \subset H_0''$. 使得

$\varphi(U_{g_0}\times V_{t_0})$ 为 G_0 中开集. 而 $\varphi(U_{g_0}\times V_{t_0})\subseteq T$, 故 T 为 G_0 中开集, 且为 $G_0\setminus S$ 中开集.

下面证 T 为 $G_0\setminus S$ 中闭集. 设 $t_i\in T$, 而其极限 $t_i\to t_0\in G_0\setminus S$. 即有 $g_i\in G_0$, $h_i\in H''$ 使得 $t_i=g_ih_ig_i^{-1}\to t_0$. 由于 G_0 紧, 故无妨设 $g_i\to g_0\in G_0$, 因而有

$$h_i=g_i^{-1}t_ig_i\to g_0^{-1}t_0g_0=h_0.$$

H_0 是闭的. 故 $h_0\in H_0'\cup H_0''$, $H_0'\cap H_0''=\varnothing$.

若 $h_0\in H_0'$, 则 $t_0\in \mathrm{ad}g_0(h_0)\in S$, 与 $t_0\in G_0\setminus S$ 矛盾. 故 $h_0\in H_0''$. 因而 $t_0\in \mathrm{ad}g_0(h_0)\in T$, 即 T 在 $G_0\setminus S$ 中为闭集. 故定理成立. □

下面给出由此定理得到的一些结果.

定理 3.6.6 设 G_0 为实连通紧李群, H_0 是其 Cartan 子群, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ 分别为 G_0, H_0 的李代数. 则

1) G_0 的任何两个 Cartan 子群共轭, 因之 $\mathfrak{g}_0$ 的任何两个 Cartan 子代数共轭;

2) $C(G_0)=\bigcap\limits_{g\in G_0}\mathrm{ad}g(H_0)$;

3) exp 是 $\mathfrak{g}_0$ 到 G_0 上的映射, 即对任何 $g_0\in G_0$ 有 $X_0\in\mathfrak{g}_0$ 使得 $g_0=\exp X_0$;

4) g_0 为 G_0 的正则元素当且仅当存在唯一的 Cartan 子群 $H_0\ni g_0$.

证 1) 因为 H_α 是 $l-1$ 维流形, 故 $H_0\setminus\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}H_\alpha\neq\varnothing$, 即 H_0 中必有正则元. 设 H_1 是另一 Cartan 子群, h_1 是 H_1 中正则元. 于是 $H_1=C(h_1)^0$. 又由定理 3.6.5 知, 存在 $g_0\in G_0$, $h_0\in H_0$ 使得 $\mathrm{ad}g_0(h_0)=h_1$. 自然, h_0 亦正则, 故 $H_1=C(\mathrm{ad}g_0(h_0))^0=\mathrm{ad}g_0(C(h_0)^0)=\mathrm{ad}g_0(H_0)$. 即 H_1 与 H_0 共轭. 所以又有 $\mathrm{Lie}H_1=\mathrm{Ad}g_0(\mathrm{Lie}H_0)$. 即 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数共轭.

2) 显然, 若 H_0 为 Cartan 子群, 则 $C(G_0)\subseteq H_0$. 故 $C(G_0)\subseteq\bigcap\limits_{g\in G_0}\mathrm{ad}g(H_0)$. 又任取 $h\in\bigcap\limits_{g\in G_0}\mathrm{ad}g(H_0)$, $g_1\in G_0$, 有 g_0 使得 $g_1\in\mathrm{ad}g_0(H_0)$. $\mathrm{ad}g_0(H_0)$ 可换, $h\in\mathrm{ad}g_0(H_0)$, 故 h 与 g_1 可换, $h\in C(G_0)$, 即 2) 成立.

3) 设 $g_0\in G_0$. 于是有 $g\in G_0$ 使得 $g_0\in\mathrm{ad}g(H_0)=H_0'$. 于是有 $X_0\in\mathrm{Lie}H_0'\subseteq\mathfrak{g}_0$, 使得 $g_0=\exp X_0$.

4) 设 t_0 为正则元, 则 $C(t_0)^0$ 为 Cartan 子群. 又若有 Cartan 子群 $H_0\ni t_0$, 则 $H_0\subseteq C(t_0)^0$. 由极大性, 立即有 $H_0=C(t_0)^0$. 即 $C(t_0)^0$ 是包含 t_0 的唯一 Cartan 子群.

反之, 若有唯一的 Cartan 子群 $H_0\ni t_0$, 若 t_0 非正则, 则 $C(t_0)^0\supsetneqq H_0$. 又 $C(t_0)^0$ 为闭子群. 故 $C(t_0)^0$ 紧连通. $t_0\in C(C(t_0)^0)$, 因而 t_0 在 $C(t_0)^0$ 的任一 Cartan 子群中. 因 $H_0\subsetneqq C(t_0)^0$, 有 $g\in C(t_0)^0\setminus H_0$. 于是有 $C(t_0)$ 的 Cartan 子群

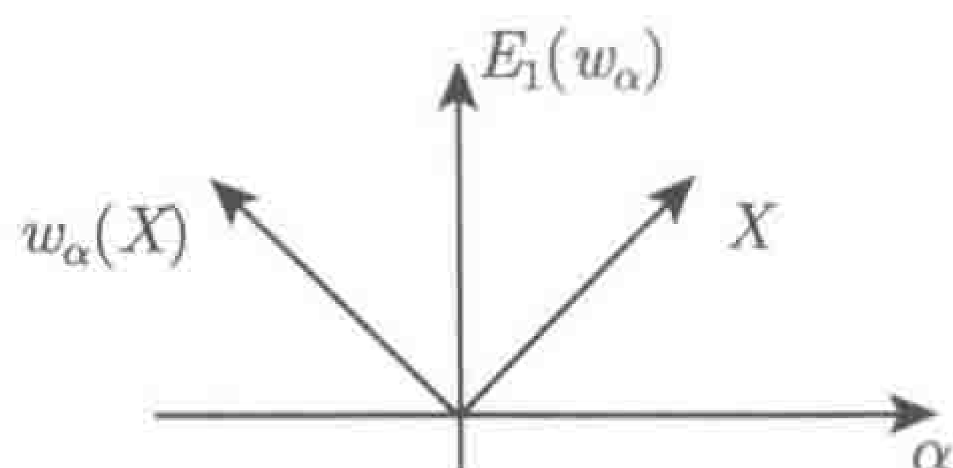
$\tilde{H}_0 \ni g$, $t_0 \in \tilde{H}_0$. 显然由 H_0 为 G_0 的 Cartan 子群, 故必为 $C(t_0)$ 的 Cartan 子群. $\tilde{H}_0$ 与 H_0 在 $C(t_0)^0$ 中共轭, 自然也在 G_0 中共轭. 故 $\tilde{H}_0$ 也是 G_0 的 Cartan 子群, 矛盾. 所以 t_0 正则. □

3.7 Weyl 群

设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧半单李代数, $\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. 于是 $\mathfrak{g} = g_0^c$ 关于 $\mathfrak{h} = h_0^c$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

利用 $\mathfrak{g}_0$ 的不变内积 (X_0, Y_0), 可将 Δ 嵌入 $\mathfrak{h}$ 中. 这时有 $\Delta \subset \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_R$. 不变内积在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制 (X, Y) 是负定的. 于是 $\mathfrak{h}_R$ 对 $-(X, Y)$ 为 Euclid 空间. $\alpha \in \mathfrak{h}_R$, 对 $\mathfrak{h}_\alpha = \{X \in \mathfrak{h}_R | (X, \alpha) = 0\}$ 的反射 w_α 为



$$w_\alpha(X) = X - \frac{2(\alpha, X)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad \forall X \in \mathfrak{h}_R.$$

其几何解释如上图所示. 其中 $E_1(w_\alpha) = \{Y \in \mathfrak{h}_R | w_\alpha(Y) = Y\} = \mathfrak{h}_\alpha$. 很明显, $w_\alpha \in O(\mathfrak{h}_R)$; 若 $U \in O(\mathfrak{h}_R)$, 则 $U w_\alpha U^{-1} = w_{U(\alpha)}$.

定理 3.7.1　1)　若 $\alpha \in \Delta$, 则 $w_\alpha(\Delta) = \Delta$;

2)　若 $\alpha \in \Delta$, 则有 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构 θ, 使得 $\theta(X) = w_\alpha(X)$, $\forall X \in \mathfrak{h}_R$.

证　1)　若 $\alpha \in \Delta$, $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $w_\alpha(-\alpha) = \alpha$. 任取 $\beta \in \Delta$, $\beta \neq \pm\alpha$, 设通过 β 的 α 链为 $\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha$, 则有 $\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = p - q$, 而 $-p \leqslant -p + q \leqslant q$. 于是

$$w_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta + (q - p)\alpha \in \Delta,$$

因而 $w_\alpha(\Delta) = \Delta$.

2)　设 τ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭, 取 $\{e_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 满足定理 3.4.2 中条件. 令 $x_\alpha = \dfrac{\pi}{\sqrt{-2(\alpha, \alpha)}}(e_\alpha + e_{-\alpha})$, 显然 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_0$. 于是 $e^{\mathrm{ad}x_\alpha}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构. 设 $X \in \mathfrak{h}_R$, 有

$$(\mathrm{ad}x_\alpha)(X) = \frac{-\pi(\alpha, X)}{\sqrt{-2(\alpha, \alpha)}}(e_\alpha - e_{-\alpha}), \quad (\mathrm{ad}x_\alpha)^2(X) = \frac{-\pi^2(\alpha, X)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

若已有

$$(\mathrm{ad}x_\alpha)^{2k-1}(X) = \frac{(-1)^k(\alpha, X)\pi^{2k-1}}{\sqrt{-2(\alpha, \alpha)}}(e_\alpha - e_{-\alpha}),$$

则

$$(\mathrm{ad}x_\alpha)^{2k}(X)=\frac{(-1)^k(\alpha,X)\pi^{2k-1}}{\sqrt{-2(\alpha,\alpha)}}\mathrm{ad}x_\alpha(e_\alpha-e_{-\alpha})=\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,X)\alpha,$$

$$(\mathrm{ad}x_\alpha)^{2k+1}(X)=\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,X)\mathrm{ad}x_\alpha(\alpha)=\frac{(-1)^{k+1}(\alpha,X)\pi^{2k+1}}{\sqrt{-2(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha-e_{-\alpha}).$$

所以有

$$\begin{aligned}
&e^{\mathrm{ad}x_\alpha}(X)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x_\alpha)^k(X)\\
=&X+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\pi^{2k}\right)\frac{(\alpha,X)}{(\alpha,\alpha)}\alpha+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)\frac{(\alpha,X)}{\sqrt{2(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha-e_{-\alpha})\\
=&X+(\cos\pi-1)\frac{(\alpha,X)}{(\alpha,\alpha)}\alpha-\frac{\sin\pi(\alpha,x_0)}{\sqrt{-2(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha-e_{-\alpha})\\
=&X-\frac{2(\alpha,X)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=w_\alpha(X).
\end{aligned}$$

因而 $\theta=e^{\mathrm{ad}x_\alpha}$, $\theta(X)=w_\alpha(X)$. □

设在 $\mathfrak{h}_R$ 确定某种正方向后, 有 $\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$ 及素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$.

我们将定义 3.5.4 中 $\mathfrak{h}_0$ 改为 $\mathfrak{h}_R$, 定理 3.5.4 的结论做相应的改变, 于是 Π 在 $\mathfrak{h}_R$ 有对应的 Weyl 房

$$\Omega_\Pi=\{X\in\mathfrak{h}_R|(X,\alpha_i)>0\}.$$

定义 3.7.1 $\{w_\alpha|\forall\alpha\in\Delta\}$ 生成的群 W 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的**Weyl 群**.

注 1 由于 Cartan 子代数的共轭性, 所以 Weyl 群实际上与 Cartan 子代数的取法无关.

注 2 对任一 $w\in W$, 由定理 3.7.1 知有 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构 σ, 其在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制恰为 w.

注 3 由于 Δ 是有限集, 又包含 $\mathfrak{h}_R$ 的基, 因此 W 是有限群.

例 3.7.1 对于 $su(n+1,\mathbf{C})^c=sl(n+1,\mathbf{C})$, $B(X,Y)$ 为 Killing 型. 以 $(X_0,Y_0)=-B(X_0,Y_0)$ 为内积. 可取

$$\mathfrak{h}_R=\left\{\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})\,\middle|\,a_i\in\mathbf{R},\ \sum_{i=1}^{n+1}a_i=0\right\}.$$

根系为

$$\Delta=\{\lambda_i-\lambda_j|i\neq j,\ 1\leqslant i,j\leqslant n+1\},\quad \lambda_i-\lambda_j=\frac{1}{2(n+1)}(E_{ii}-E_{jj}).$$

设 $X = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$, 不妨设 $i < j$. 于是

$$w_\alpha(X) = X - \frac{2(\alpha, X)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = X - \frac{2\mathrm{tr}(\alpha X)}{\mathrm{tr}\alpha^2}\alpha = X - (a_i - a_j)(E_{ii} - E_{jj})$$
$$= \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \cdots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \cdots, a_{n+1}).$$

即 w_α 是将 $n+1$ 个文字 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 中的 a_i, a_j 对换, 因而 $sl(n+1, \mathbf{C})$ 的 Weyl 群 W 与对称群 S_{n+1} 同构.

引理 3.7.1 Δ 为根系, Π 为素根系, Ω_Π 为对应的 Weyl 房.

1) 若 $\sigma \in W$. 则 $\sigma(\Omega_\Pi)$ 仍为 Weyl 房; $\sigma(\Pi)$ 为某种次序下的素根系, 且有 $\sigma(\Omega_\Pi) = \Omega_{\sigma(\Pi)}$;

2) $\forall \alpha \in \Delta$, 必有一个素根系 $\Pi \ni \alpha$.

证 1) 因为 $\sigma \in O(\mathfrak{h}_R)$, $\sigma(\Delta) = \Delta$. x_0 为 Ω_Π 中正则元, 则有 $(\sigma(x_0), \alpha) = (x_0, \sigma(\alpha)) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Delta$, 故 $\sigma(x_0)$ 仍为正则元. $\{\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_l)\} = \sigma(\Pi)$ 为素根系, 而且

$$\sigma(x_0) \in \{\sigma(x) \in \mathfrak{h}_R | (x, \alpha_i) > 0\} = \{\sigma(x) \in \mathfrak{h}_R | (\sigma(x), \sigma(\alpha_i)) > 0\} = \Omega_{\sigma(\Pi)}.$$

于是结论 1) 成立.

2) 在 $\mathfrak{h}_\alpha$ 中取 x_1, 使得 $(x_1, \beta) \neq 0, \forall \beta \in \Delta \setminus \{\pm\alpha\}$. 设 $x_2 \notin \mathfrak{h}_\alpha$, 于是有适当小的 t, 使得

$$(x_1 + tx_2, \beta)(x_1, \beta) > 0, \quad \forall \beta \in \Delta \setminus \{\pm\alpha\},$$
$$(\alpha, x_1 + tx_2) = t(\alpha, x_2) \neq 0.$$

于是 $x_1 + tx_2$ 是正则元素, 对应一个 Weyl 房与相应的素根系 $\Omega = \{x \in \mathfrak{h}_R | (\beta_i, x) > 0\}$, $\Pi = \{\beta_1, \cdots, \beta_l\}$. 若 $\pm\alpha \notin \Omega$, 由 $(\beta_i, x_1 + tx_2) > 0$, (x_1, β) 又与 $(\beta, x_1 + tx_2)$ 同号, 知 $(x_1, \beta_i) > 0$. 即 $x_1 \in \Omega$ 为正则元, 与 $x_1 \in \mathfrak{h}_\alpha$ 矛盾. 因而 $\alpha \in \pm\Pi$, 而 $\pm\Pi$ 均为素根系. □

定理 3.7.2 Δ, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$, W 分别为根系、素根系和 Weyl 群. 又记 $\{w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_l}\}$ 生成的群为 W'. 则有以下结果:

1) W' 可递地作用在 Weyl 房集合上;

2) $W' = W$;

3) $w \in W$, 使 $w(\Pi) = \Pi$, 则 $w = \mathrm{id}$. 换句话说, W 在 Weyl 房集合上单可递地作用.

证 先证 W' 在 Weyl 房集合上的作用可递. Ω' 是一 Weyl 房, $x \in \Omega'$. 取 $x_0 \in \Omega_\Pi$, $\exists w_0 \in W'$, 使得

$$(w_0(x) - x_0, w_0(x) - x_0) = \min_{w \in W'} \{(w(x) - x_0, w(x) - x_0)\}.$$

若 $w_0(x) \notin \Omega_\Pi$, 则有 α_i 使得 $(w_0x, \alpha_i) < 0$. 又 $w_{\alpha_i}w_0(x) = w_0(x) - \dfrac{2(\alpha_i, w_0(x))}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$. 由此可得

$$\begin{aligned}&(w_{\alpha_i}w_0(x) - x_0, w_{\alpha_i}w_0(x) - x_0)\\=&(w_0(x) - x_0, w_0(x) - x_0) + \frac{4(\alpha_i, w_0(x))(x_0, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} < (w_0(x) - x_0, w_0(x) - x_0),\end{aligned}$$

矛盾. 于是 $w_0(x) \in \Omega_\Pi$. 故 $w_0(\Omega') = \Omega_\Pi$.

其次, 证明 $W' = W$. 设 $\alpha \in \Delta$, 故有素根系 $\Pi' \ni \alpha$. 因而有 $w_0 \in W'$, 使 $w_0(\Pi) = \Pi'$, 即有 $\alpha_i \in \Pi$ 使得 $w_0(\alpha_i) = \alpha$. 故

$$w_\alpha = w_{w_0\alpha_i} = w_0 w_{\alpha_i} w_0^{-1} \in W'.$$

因此 $W = W'$.

最后, 证明 W 在 Weyl 房集合上的作用单可递.

显然, $w(\Pi) = \Pi$ 当且仅当 $w(\Delta_+) = \Delta_+$. $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$, $i \neq j$ 时, 则 $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta$. 过 α_j 的 α_i 链中 $p = 0$, $q \geqslant 0$. 因而 $w_{\alpha_i}(\alpha_j) \in \Delta_+$. $w_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$, 故

$$w_{\alpha_i}(\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}) \subseteq \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}.$$

若 $w \neq \mathrm{id}$, 则有 $w = w_{\alpha_{i_1}} w_{\alpha_{i_2}} \cdots w_{\alpha_{i_t}}$, $t > 0$. 可取所有这种表示中 t 取值最小的. 现证明 $w(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-$, 就得到矛盾. 由上式有

$$w(\alpha_{i_t}) = w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}}(-\alpha_{i_t}).$$

若 $w(\alpha_{i_t}) \in \Delta_+$, 则

$$w_{\alpha_{i_1}} w_{\alpha_{i_2}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}}(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-.$$

而 $\alpha_{i_t} \in \Delta_+$, 于是有 s 使得

$$\beta_s = w_{\alpha_{i_s}} w_{\alpha_{i_{s+1}}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}}(\alpha_{i_t}) \in \Delta_+,$$

因 $w_{\alpha_{i_{s-1}}}(\beta_s) \in \Delta_-$, 由此可知 $\beta_s = \alpha_{i_{s-1}}$, $w_{\alpha_{i_{s-1}}}(\beta_s) = -\alpha_{i_{s-1}}$, 故有

$$w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_s}} \alpha_{i_{s-1}} = \alpha_{i_t}, \quad w_{\alpha_{i_t}} w_{\alpha_{i_{t-1}}} \cdots w_{\alpha_{i_s}}(\alpha_{i_{s-1}}) = -\alpha_{i_t}.$$

于是

$$\begin{aligned}w &= w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{s-2}}} w_{\alpha_{i_{s-1}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_t}}\\&= w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{s-2}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_t}} (w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_t}})^{-1} \cdot w_{\alpha_{i_{s-1}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_t}}\\&= w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{s-2}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}} w_{\alpha_{i_t}} w_{(w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_t}})^{-1}(\alpha_{i_{s-1}})}\\&= w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{s-2}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}} w_{\alpha_{i_t}} w_{-\alpha_{i_t}} = w_{\alpha_{i_1}} \cdots w_{\alpha_{i_{s-2}}} w_{\alpha_{i_s}} \cdots w_{\alpha_{i_{t-1}}}.\end{aligned}$$

这不符合 t 的取法. 于是 $w(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-$. □

习 题

1. 试问 Weyl 群的阶恰为 Weyl 房的个数是何情形?
2. 求 G_2 的根系及 Weyl 群的阶.

3.8 紧李代数的分类

紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有理想直和分解 $\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$, 其中 $\mathfrak{g}_0$ 是环面, $\mathfrak{g}_i$ 为紧单李代数, 因而紧单李代数的分类决定了紧李代数的分类.

定理 3.8.1 设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧单李代数, 则其复化 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 为复单李代数.

证 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{g}_0$ 的半对合为 τ. 若 $\mathfrak{g}$ 非单, 则有单理想 $\mathfrak{g}_1$. 于是 $\tau(\mathfrak{g}_1)$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 因而 $\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1)$ 也是理想. 于是有 $\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1) \neq \{0\}$ 或 $\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$.

1) 若 $\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1) \neq \{0\}$, 则由 $\tau(\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1)) = \mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1)$, $\mathfrak{g}_1$ 为单理想, 知有 $\tau(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$. 因而 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的理想, 且 $(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_1)^c = \mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}$. 即 $\mathfrak{g}_0$ 非单, 矛盾.

2) $\mathfrak{g}_1 \cap \tau(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$. 而 $\mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 之理想, 且有 $\tau(\mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1)) = \mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1)$. 故 $\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1))$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的理想, 但 $\mathfrak{g}_0$ 单, 于是 $\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1)) = \mathfrak{g}_0$. 因而 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c = (\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1)))^c = \mathfrak{g}_1 \oplus \tau(\mathfrak{g}_1)$.

设 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数, 于是 $\tau(\mathfrak{h}_1)$ 为 $\tau(\mathfrak{g}_1)$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 于是由 $\tau(\mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1)$, 知 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1))$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数, 且 $\mathfrak{h}_0^c = \mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1)$. 又 $\mathfrak{g}_1$, $\tau(\mathfrak{g}_1)$ 与 $\mathfrak{g}$ 分别有根子空间分解

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= \mathfrak{h}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha, \\
\tau(\mathfrak{g}_1) &= \tau(\mathfrak{h}_1) + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \tau(\mathfrak{g}_\alpha), \\
\mathfrak{g} &= \mathfrak{h}_1 + \tau(\mathfrak{h}_1) + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \tau(\mathfrak{g}_\alpha).
\end{aligned}$$

任取 $\alpha \in \Delta_1$, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_1$, 故 $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_1$. 又 $\tau(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \tau(\mathfrak{g}_1)$, $\tau(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_1$. 由此可知 $\tau(\mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$, 矛盾.

于是从上面讨论知 $\mathfrak{g}_0^c = \mathfrak{g}$ 是复单李代数. □

为证明任何复半单李代数均有紧致实形式, 我们先叙述一下复半单李代数的有关结果.

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数, (X, Y) 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 于是有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

利用 Killing 型可将 α 嵌入 $\mathfrak{h}$ 中, 仍以 α 表示. 可取 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 满足

$$\begin{aligned}
&[h,\ e_\alpha] = (\alpha,\ h)e_\alpha, \qquad h \in \mathfrak{h},\\
&[e_\alpha,\ e_{-\alpha}] = \alpha,\\
&[e_\alpha,\ e_\beta] = N_{\alpha\,\beta} e_{\alpha+\beta}, \qquad \alpha+\beta \neq 0,\\
&N_{\alpha\,\beta} = N_{-\alpha\,-\beta}.
\end{aligned}$$

这时有 $(e_\alpha,\ e_{-\alpha}) = 1$, $N_{\alpha\,\beta} \in \mathbf{R}$. 若过 β 的 α 链为 $\beta - p\alpha, \cdots, \beta, \cdots, \beta + q\alpha$. 则有

$$N_{\alpha\,\beta}^2 = \frac{1}{2}(p+1)q(\alpha,\ \alpha),$$

因而 $(\alpha,\ \alpha) > 0$.

定理 3.8.2 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 有紧致实形式 $\mathfrak{g}_0$.

证 取 $\mathfrak{g}$ 的任一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中取 e_α 如上所述. 在 $\mathfrak{g}$ 中定义半对合 τ 满足

$$\tau(\alpha) = -\alpha, \quad \tau(e_\alpha) = -e_{-\alpha}.$$

令 $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} | \tau(X) = X\}$. 若 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_l\}$ 是一组素根系, 则 $\mathfrak{g}_0$ 有基

$$\sqrt{-1}\alpha_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l; \quad e_\alpha - e_{-\alpha}, \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}), \quad \alpha \in \Delta_+.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{-1}\alpha_i,\ \sqrt{-1}\alpha_i) = -(\alpha_i,\ \alpha_i) < 0,\\
&(e_\alpha - e_{-\alpha},\ e_\alpha - e_{-\alpha}) = -2 < 0,\\
&(\sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha}),\ \sqrt{-1}(e_\alpha + e_{-\alpha})) = -2 < 0,
\end{aligned}$$

因而 $(X,\ Y)|_{\mathfrak{g}_0}$ 是负定的. 故只要证明 $\mathfrak{g}_0$ 对换位运算封闭即可, 即只要证明 τ 保持换位运算. 显然

$$\begin{aligned}
&\tau([e_\alpha,\ e_\beta]) = N_{\alpha\,\beta}\tau(e_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha\,\beta}(e_{-\alpha-\beta}) = [-e_{-\alpha},\ -e_{-\beta}] = [\tau(e_\alpha),\ \tau(e_\beta)],\\
&\tau([e_\alpha,\ e_{-\alpha}]) = -\alpha = [-e_{-\alpha},\ -e_\alpha] = [\tau(e_\alpha),\ \tau(e_{-\alpha})].
\end{aligned}$$

再注意到 $(\alpha,\ \alpha) \in \mathbf{R}$, $\dfrac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)} \in \mathbf{R}$. 于是 $(\alpha,\ \beta) \in \mathbf{R}$. 对 $h \in \mathfrak{h}$, 有

$$h = \sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{l} \sqrt{-1}b_i\alpha_i, \quad a_i,\ b_i \in \mathbf{R},$$

于是

$$\tau([h,\ e_\alpha]) = -\overline{(h,\ \alpha)}e_{-\alpha} = \sum_{i=1}^{l}(-a_i + \sqrt{-1}b_i)(\alpha_i,\ \alpha)e_{-\alpha} = (\tau(h),\ \alpha)e_{-\alpha}$$
$$= [\tau(h),\ \tau(e_\alpha)].$$

因而 $\mathfrak{g}_0$ 是紧致实形式. □

当然, 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式不止一个. 但是这些紧致实形式在 $\mathfrak{g}$ 的内自同构下共轭, 因而都是同构的. 因此紧半单李代数的分类完全化成了复半单李代数的分类.

定理 3.8.3 设 $B(x,y)$ 是有限维复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. (x,y) 是 $\mathfrak{g}$ 的不变双线性型. 则有以下结果:

1) 若 $(x,y)\neq 0$, 则 (x,y) 是非退化的;

2) 存在常数 c 使得 $(x,y)=cB(x,y)$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$;

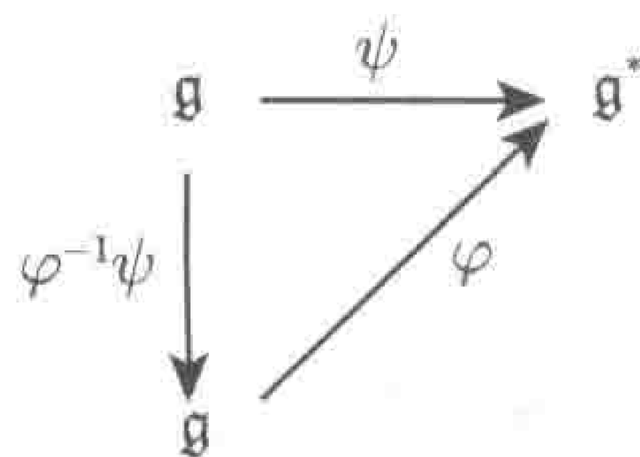
3) $\forall\sigma\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 有 $(\sigma(x),\ \sigma(y))=(x,\ y)$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

证 1) 令 $\mathfrak{g}_0=\{x\in\mathfrak{g}|(x,y)=0,\ \forall y\in\mathfrak{g}\}$. 显然, $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 又由 $(x,y)\neq 0$ 且不变, 即

$$([x,z],y) = -(x,[y,z]) = 0,\ \forall y,z\in\mathfrak{g}, x\in\mathfrak{g}_0,$$

知 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的真理想, 故 $\mathfrak{g}_0=\{0\}$. 因而 (x,y) 是非退化的.

2) 由于 $B(x,y),(x,y)$ 非退化, 故有 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 的线性空间的同构映射 φ,ψ 使得



$$\varphi(x)(y) = B(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},$$
$$\psi(x)(y) = (x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},$$

于是 $\mathcal{A}=\varphi^{-1}\psi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可逆线性变换. 且有

$$B(\mathcal{A}(x),y) = B(\varphi^{-1}\psi(x),y) = \varphi(\varphi^{-1}\psi(x))(y) = \psi(x)(y) = (x,y).$$

又 $(x,y),B(x,y)$ 都是不变双线性型, 故 $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$,

$$B(\mathrm{ad}z(\mathcal{A}(x)),\ y) = -B(\mathcal{A}(x),\mathrm{ad}z(y))$$
$$= -(x,\mathrm{ad}z(y)) = (\mathrm{ad}z(x),y) = B(\mathcal{A}\mathrm{ad}z(x),y).$$

由 $B(x,y)$ 非退化, 知 $\mathrm{ad}z\mathcal{A}=\mathcal{A}\,\mathrm{ad}z$, $\forall z\in\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数, 故 $(\mathrm{ad},\ \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 因而由 Schur 引理, 知 $\mathcal{A}=c\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. 于是 $(x,y)=B(\mathcal{A}(x),y)=cB(x,y)$.

3) $\forall x \in \mathfrak{g}, \sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 有 $\sigma \cdot \mathrm{ad}x \cdot \sigma^{-1} = \mathrm{ad}\sigma(x)$. 于是

$$B(\sigma(x), \sigma(y)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\sigma(x)\mathrm{ad}\sigma(y)) = \mathrm{tr}(\sigma \mathrm{ad}x \mathrm{ad}y \sigma^{-1}) = B(x, y).$$

所以 $(\sigma(x),\ \sigma(y)) = (x,\ y)$ □

定理 3.8.4 紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 及其复化 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 对应的 Dynkin 图是唯一的.

证 由于紧半单李代数可唯一地分解为紧单理想的直和, 故可假定 $\mathfrak{g}_0$ 是紧单李代数. 于是由定理 3.8.1, 知 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 是复单李代数.

由定理 3.8.3, 知 $\mathfrak{g}_0$ 的不变内积 $(X_0, Y_0) = cB(X_0, Y_0)$ $(c < 0, B(X_0, Y_0)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型). 于是 $\mathfrak{g}_0$ $(\mathfrak{g})$ 的 Dynkin 图与内积的选取无关.

若 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 是两个 Cartan 子代数, 相应的根系、素根系为 $\Delta_1, \Delta_2, \Pi_1, \Pi_2$. 由定理 3.6.6, 有 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构 θ_1, 使得 $\theta_1(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, 而且

$$\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)], \quad (\theta_1(X), \theta_1(Y)) = (X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

因而 $\theta_1(\Delta_1) = \Delta_2$. $\theta_1(\Pi_1)$ 为 Δ_2 中的某种素根系. 设 W 是关于 $\mathfrak{h}_2$ 的 Weyl 群, 于是由定理 3.7.2, 有 $w \in W$, 使得 $w(\theta_1(\Pi_1)) = \Pi_2$. 再由定理 3.7.1, 有 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构 θ_2, 使得其在 $\mathfrak{h}_{2R}$ 上的限制为 w. 于是 $\theta = \theta_2\theta_1$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构, 且 $\theta(\Pi_1) = \Pi_2$, 故 Π_1, Π_2 确定同样的 Dynkin 图. □

习　　题

1. 证明紧 (复) 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对不同 Cartan 子代数的 Weyl 群是同构的.

2. 设紧 (复) 半单李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. W, W_1, W_2 分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 的 Weyl 群, 则 $W = W_1 \otimes W_2$.

3.9 $SO(n), Sp(n)$ 的李代数

我们知道紧群 $SO(n)$ 的李代数 $so(n)$ 的复化为 $so(n, \mathbf{C})$. 本节将决定相应的根系、素根系、Dynkin 图与 Weyl 群. 由于 $so(n)$ 由反对称矩阵构成, 因而其中没有非零的对角矩阵, 计算比较麻烦, 但是可以经过技术处理解决这个麻烦.

引理 3.9.1 设 $\mathbf{F}$ 是一个域, $M \in \mathbf{F}^{n\times n}$. 则 $g(n, M, \mathbf{F}) = \{X \in gl(n, \mathbf{F}) | XM + MX' = 0\}$ 是 $gl(n, \mathbf{F})$ 的子代数.

又若 M_1 与 M 合同, 即有可逆矩阵 P 使得 $M_1 = PMP'$, 则 $g(n, M, \mathbf{F})$ 与 $g(n, M_1, \mathbf{F})$ 同构.

证 显然 $g(n,M,\mathbf{F})$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的子空间, 设 $X,Y\in g(n,M,\mathbf{F})$, 由

$$\begin{aligned}
&[X,Y]M+M[X,Y]'\\
&=(XY-YX)M+M(Y'X'-X'Y')\\
&=X(YM+MY')-XMY'-Y(XM+MX')+YMX'+MY'X'-MX'Y'\\
&=X(YM+MY')-Y(XM+MX')-(XM+MX')Y'+(YM+MY')X'=0,
\end{aligned}$$

因此 $g(n,M,\mathbf{F})$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的子代数.

因为 P 可逆, 于是由 $\mathcal{P}(X)=PXP^{-1}$ 定义的 $\mathcal{P}$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的自同构. 又 $XM+MX'=0$, 当且仅当 $P(XM+MX')P'=0$, 当且仅当 $PXP^{-1}PMP'+PMP'P'^{-1}X'P'=0$, 即 $\mathcal{P}(X)M_1+M_1(\mathcal{P}(X))'=0$. 故 $g(n,M,\mathbf{F})$ 与 $g(n,M_1,\mathbf{F})$ 同构. □

定理 3.9.1 令 $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_l\\0&I_l&0\end{pmatrix}$. 则有

1) $g(2l+1,S,\mathbf{C})$ 与 $so(2l+1,\mathbf{C})$ 同构;

2) $\mathfrak{g}=g(2l+1,S,\mathbf{C})$ 有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l)|x_i\in\mathbf{C}\};$$

$\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有空间直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$, 其中

$$\begin{cases}
\Delta=\{\pm\lambda_k,\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j)|1\leqslant k\leqslant l;1\leqslant i<j\leqslant l\},\\
\lambda_i(\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l))=x_i,\quad 1\leqslant i\leqslant l,\\
\mathfrak{g}_{\lambda_k}=\mathbf{C}W_k,\quad W_k=E_{1+k\,1}-E_{1\,l+k+1},\ 1\leqslant k\leqslant l,\\
\mathfrak{g}_{-\lambda_k}=\mathbf{C}V_k,\quad W_k=E_{1\,1+k}-E_{l+k+1\,1},\ 1\leqslant k\leqslant l,\\
\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}=\mathbf{C}A_{ij}\quad A_{ij}=E_{1+i\,1+j}-E_{l+1+j\,l+1+i},\ i\neq j,\\
\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}=\mathbf{C}B_{ij},\quad B_{ij}=E_{1+i\,l+1+j}-E_{1+j\,l+1+i},\ 1\leqslant i<j\leqslant l,\\
\mathfrak{g}_{-(\lambda_i+\lambda_j)}=\mathbf{C}C_{ij},\quad C_{ij}=E_{l+1+i\,1+j}-E_{l+1+j\,1+i},\ 1\leqslant i<j\leqslant l;
\end{cases}$$

3) 可取素根系 $\Pi=\{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3,\cdots,\lambda_{l-1}-\lambda_l,\lambda_l\}$;

4) 对应 Dynkin 图为 B_l;

5) Weyl 群 W 同构于 2^l 阶的正规初等 2 子群与对称群 S_l 的半直积.

证 1) 由于作为复矩阵 S 与 I_{2l+1} 合同, 因而由引理 3.9.1 知结论 1) 成立.

2) 设 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{pmatrix}\in g(2l+1,S,\mathbf{C})$, 其中 X_{22}, X_{33} 为 l 阶方阵.

由 $XSX'=S$, 可得 $X=\begin{pmatrix} 0 & V & -W' \\ W & A & B \\ -V' & C & -A' \end{pmatrix}$, $B'=-B, C'=-C$. 由此知结论 2) 成立.

3) 令 $\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\cdots,\alpha_{l-1}=\lambda_{l-1}-\lambda_l$, $\alpha_l=\lambda_l$, 则不难验证, $\forall\alpha\in\Delta$, $\alpha=\pm\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$, n_i 是不全为 0 的非负整数. 于是 Π 为素根系.

4) 显然 $H_i=E_{1+i\,1+i}-E_{l+1+i\,l+1+i}$ $(i=1,2,\cdots,l)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基, 而且 $\lambda_k(H_i)=\delta_{ik}$. 由此可见

$$\begin{cases} (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)W_s=\delta_{si}\delta_{sj}W_s, \\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)V_s=\delta_{si}\delta_{sj}V_s, \\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)A_{st}=(\delta_{si}-\delta_{ti})(\delta_{sj}-\delta_{tj})A_{st}, \\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)B_{st}=(\delta_{si}+\delta_{ti})(\delta_{sj}+\delta_{tj})B_{st}, \\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)C_{st}=(\delta_{si}+\delta_{ti})(\delta_{sj}+\delta_{tj})C_{st}; \end{cases}$$

于是对 Killing 型 (X,Y) 有:

$$(H_i,H_j)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)=(4l-2)\delta_{ij}=((2l+1)-2)\mathrm{tr}(H_iH_j),\quad 1\leqslant i,j\leqslant l.$$

由此可令 $\lambda_i=\dfrac{1}{4l-2}H_i, 1\leqslant i\leqslant l$, 因而

$$(\lambda_i,\lambda_j)=\frac{1}{4l-2}\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant l.$$

由此容易得到 Π 对应的 Dynkin 图为 B_l.

5) 从前面证明已得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基, 对于 $h=\sum\limits_{i=1}^{l}x_i\lambda_i$, 有

$$w_{\lambda_i}(h)=-x_i\lambda_i+\sum_{j\neq i}x_j\lambda_j,\quad 1\leqslant i\leqslant l,$$
$$w_{\lambda_i}w_{\lambda_j}=w_{\lambda_j}w_{\lambda_i},\quad 1\leqslant i,j\leqslant l,$$

知 $\{w_{\lambda_i}|1\leqslant i\leqslant l\}$ 生成 W 的一个 2^l 阶的正规初等 2 子群, 记为 W_1. 又由

$$w_{\lambda_i-\lambda_j}(h)=x_j\lambda_i+x_i\lambda_j+\sum_{k\neq i,j}x_k\lambda_k,\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant l,$$

于是 $\{w_{\lambda_i-\lambda_j}|1\leqslant i\neq j\leqslant l\}$ 生成 W 的子群 W_2 同构于对称群 S_l . 注意

$$w_{\lambda_j}w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{\lambda_j}=w_{w_{\lambda_j}(\lambda_i-\lambda_j)}=w_{\lambda_i+\lambda_j},$$

$$w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{\lambda_k}w_{\lambda_i-\lambda_j}=\begin{cases} w_{\lambda_k}, & k\neq i,j, \\ w_{\lambda_i}, & k=j, \\ w_{\lambda_j}, & k=i. \end{cases}$$

由此知 W_1 是正规子群, $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. 于是结论 5) 成立. □

推论　$l \geqslant 1$ 时, $so(2l+1,\mathbf{C})$ 是复单李代数, $so(2l+1,\mathbf{R})$ 是紧单李代数.

这是因为 B_l 是连通的 Dynkin 图.

定理 3.9.2　令 $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$. 则有

1) $g(2l, S_1, \mathbf{C})$ 与 $so(2l,\mathbf{C})$ 同构;

2) $\mathfrak{g} = g(2l, S_1, \mathbf{C})$ 有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_l) | x_i \in \mathbf{C}\}.$$

$\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有空间直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, 其中

$$\begin{cases} \Delta = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) | 1 \leqslant i < j \leqslant l\}, \\ \lambda_i(\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_l)) = x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \\ \mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j} = \mathbf{C}A_{ij} \quad A_{ij} = E_{i\,j} - E_{l+j\,l+i}, \ i \neq j, \\ \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = \mathbf{C}B_{ij}, \quad B_{ij} = E_{i\,l+j} - E_{j\,l+i}, \ 1 \leqslant i < j \leqslant l, \\ \mathfrak{g}_{-(\lambda_i + \lambda_j)} = \mathbf{C}C_{ij}, \quad C_{ij} = E_{l+i\,j} - E_{l+j\,i}, \ 1 \leqslant i < j \leqslant l; \end{cases}$$

3) 可取素根系 $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$;

4) $l \geqslant 4$ 时, 对应 Dynkin 图为 D_l;

5) Weyl 群 W 同构于 2^{l-1} 阶的正规初等 2-子群与对称群 S_l 的半直积.

证　1) 由于作为复矩阵 S_1 与 I_{2l} 合同, 因而由引理 3.9.1 知结论 1) 成立.

2) 设 $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in g(2l, S_1, \mathbf{C})$, 其中 X_{11} 为 l 阶方阵. 由 $XS_1X' = S_1$, 可得 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}$, $B' = -B$, $C' = -C$. 由此知结论 2) 成立.

3) 令 $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \cdots, \alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l$, $\alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$, 则 $\forall \alpha \in \Delta$, $\alpha = \pm\sum\limits_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$, n_i 是不全为 0 的非负整数. 于是 Π 为素根系.

4) 显然 $H_i = E_{i\,i} - E_{l+i\,l+i}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基, 而且 $\lambda_k(H_i) = \delta_{ik}$. 由此可见

$$\begin{cases} (\mathrm{ad}H_i \mathrm{ad}H_j)A_{st} = (\delta_{si} - \delta_{ti})(\delta_{sj} - \delta_{tj})A_{st}, \\ (\mathrm{ad}H_i \mathrm{ad}H_j)B_{st} = (\delta_{si} + \delta_{ti})(\delta_{sj} + \delta_{tj})B_{st}, \\ (\mathrm{ad}H_i \mathrm{ad}H_j)C_{st} = (\delta_{si} + \delta_{ti})(\delta_{sj} + \delta_{tj})C_{st}; \end{cases}$$

于是对 Killing 型 (X, Y) 有:

$$(H_i, H_j) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}H_i \mathrm{ad}H_j) = (4l-4)\delta_{ij} = (2l-2)\mathrm{tr}(H_iH_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant l.$$

由此可令 $\lambda_i = \dfrac{1}{4l-4}H_i, 1 \leqslant i \leqslant l$, 因而

$$(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{4l-4}\delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant l.$$

由此容易得到 Π 对应的 Dynkin 图为 D_l.

5) 从前面证明已得 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基, 对于 $h = \sum\limits_{i=1}^{l} x_i\lambda_i$, 有

$$w_{\lambda_i+\lambda_j}(h) = -x_i\lambda_j - x_j\lambda_i + \sum_{k\neq i,j} x_k\lambda_k, \quad i \neq j,$$
$$w_{\lambda_i-\lambda_j}(h) = x_j\lambda_i + x_i\lambda_j + \sum_{k\neq i,j} x_k\lambda_k, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant l,$$

于是

$$w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{\lambda_i+\lambda_j}(h) = -x_i\lambda_i - x_j\lambda_j + \sum_{k\neq i,j} x_k\lambda_k, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant l,$$

$\{w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{\lambda_i+\lambda_j} | 1 \leqslant i \neq j \leqslant l\}$ 生成 W 的子群 W_1 是 2^{l-1} 阶的正规初等 2-子群, 而 $\{w_{\lambda_i-\lambda_j} | 1 \leqslant i \neq j \leqslant l\}$ 生成 W 的子群 W_2 同构于对称群 S_l. 注意, 如果 $w_{\lambda_s-\lambda_t}(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_u - \lambda_v$, 则 $w_{\lambda_s-\lambda_t}(\lambda_i + \lambda_j) = \lambda_u + \lambda_v$, 于是

$$w_{\lambda_s-\lambda_t}(w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{\lambda_i+\lambda_j})w_{\lambda_s-\lambda_t} = w_{\lambda_u-\lambda_v}w_{\lambda_u+\lambda_v},$$

由此知 W_1 是正规子群, $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. 于是结论 5) 成立. □

推论 $l \geqslant 4$ 时, $so(2l, \mathbf{C})$ 是复单李代数, $so(2l, \mathbf{R})$ 是紧单李代数.

这是因为 D_l 是连通的 Dynkin 图.

我们知道紧群 $Sp(l)$ 的李代数 $sp(l)$ 的复化为 $sp(l, \mathbf{C})$. 下面决定其相应的根系、素根系、Dynkin 图与 Weyl 群.

定理 3.9.3 1) $sp(l, \mathbf{C})$ 对其 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_l) | x_i \in \mathbf{C}\}$$

有空间直和分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$, 其中

$$\begin{cases} \Delta = \{\pm 2\lambda_k, \pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) |, 1 \leqslant k \leqslant l, 1 \leqslant i < j \leqslant l\}, \\ \lambda_i(\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_l)) = x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \\ \mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j} = \mathbf{C}A_{ij} \quad A_{ij} = E_{i\,j} - E_{l+j\,l+i}, \ i \neq j, \\ \mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j} = \mathbf{C}B_{ij}, \quad B_{ij} = E_{i\,l+j} + E_{j\,l+i}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant l, \\ \mathfrak{g}_{-(\lambda_i+\lambda_j)} = \mathbf{C}C_{ij}, \quad C_{ij} = E_{l+i\,j} + E_{l+j\,i}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant l. \end{cases}$$

2)　**可取素根系** $\Pi=\{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3,\cdots,\lambda_{l-1}-\lambda_l,2\lambda_l\}$,

3)　**对应 Dynkin 图为** C_l;

4)　**Weyl 群** W **同构于** 2^l **阶的正规初等 2-子群与对称群** S_l **的半直积.**

证　1)　设 $X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\in sp(l,\mathbf{C})$, 其中 X_{11} 为 l 阶方阵. 由 $XJX'=J$, 可得 $X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A'\end{pmatrix}$, $B'=B$, $C'=C$. 由此知结论 1) 成立.

2)　令 $\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\cdots,\alpha_{l-1}=\lambda_{l-1}-\lambda_l$, $\alpha_l=2\lambda_l$, 则不难验证, $\forall\alpha\in\Delta$, $\alpha=\pm\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$, n_i 是不全为 0 的非负整数. 于是 Π 为素根系.

3)　显然 $H_i=E_{i\,i}-E_{l+i\,l+i}$ $(i=1,2,\cdots,l)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基, 而且 $\lambda_k(H_i)=\delta_{ik}$. 由此可见

$$\begin{cases}(\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)A_{st}=(\delta_{si}-\delta_{ti})(\delta_{sj}-\delta_{tj})A_{st},\\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)B_{st}=(\delta_{si}+\delta_{ti})(\delta_{sj}+\delta_{tj})B_{st},\\ (\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)C_{st}=(\delta_{si}+\delta_{ti})(\delta_{sj}+\delta_{tj})C_{st}.\end{cases}$$

于是对 Killing 型 (X,Y) 有:

$$(H_i,H_j)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_j)=(4l+4)\delta_{ij}=(2l+2)\mathrm{tr}(H_iH_j),\quad 1\leqslant i,j\leqslant l.$$

由此可令 $\lambda_i=\dfrac{1}{4l+4}H_i, 1\leqslant i\leqslant l$, 因而

$$(\lambda_i,\lambda_j)=\frac{1}{4l+4}\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant l.$$

由上容易得到 Π 对应的 Dynkin 图为 C_l.

4)　从前面证明已得 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的基, 对于 $h=\sum\limits_{i=1}^{l}x_i\lambda_i$, 有

$$w_{2\lambda_i}(h)=-x_i\lambda_i+\sum_{j\neq i}x_j\lambda_j,\quad 1\leqslant i\leqslant l,$$
$$w_{2\lambda_i}w_{2\lambda_j}=w_{2\lambda_j}w_{2\lambda_i},\quad 1\leqslant i,j\leqslant l,$$

知 $\{w_{\lambda_i}|1\leqslant i\leqslant l\}$ 生成 W 的一个 2^l 阶的正规初等 2-子群, 记为 W_1. 又由

$$w_{\lambda_i-\lambda_j}(h)=x_j\lambda_i+x_i\lambda_j+\sum_{k\neq i,j}x_k\lambda_k,\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant l,$$

于是 $\{w_{\lambda_i-\lambda_j}|1\leqslant i\neq j\leqslant l\}$ 生成 W 的子群 W_2 同构于对称群 S_l. 注意,

$$w_{2\lambda_j}w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{2\lambda_j}=w_{w_{2\lambda_j}(\lambda_i-\lambda_j)}=w_{\lambda_i+\lambda_j},$$

$$w_{\lambda_i-\lambda_j}w_{2\lambda_k}w_{\lambda_i-\lambda_j}=\begin{cases}w_{2\lambda_k}, & k\neq i,j,\\ w_{2\lambda_i}, & k=j,\\ w_{2\lambda_j}, & k=i.\end{cases}$$

由此知 W_1 是正规子群, $W_1\cap W_2=\varnothing$. 于是结论 4) 成立. □

推论 $sp(l,\mathbf{C})$ 是复单李代数, $sp(l)$ 是紧单李代数.

这是因为 C_l 是连通的 Dynkin 图.

习 题

1. 讨论 $l=1,2,3$ 时, $so(2l,\mathbf{C})$ 的结构.
2. 讨论 $sp(2)$ 与 $so(5,\mathbf{R})$ 的关系.
3. 讨论 $sl(4)$ 与 $so(6,\mathbf{C})$ 的关系.

第 4 章　紧李群的有限维表示

本章介绍紧李群的有限维表示的一些基本性质. 前面我们已经介绍过李群的表示一定导出其李代数的表示, 而且它们有相同的可约性. 另外我们还知道, 由于紧李群有不变积分, 因此其任何有限维表示空间上都有不变内积, 故是完全可约的.

4.1　紧李代数的复表示

如果 (ρ, V) 是 G_0 的一个表示, 那么 $(d\rho, V)$ 是 G_0 的李代数 $\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0$ 的一个表示, 仍记为 (ρ, V). 反过来, 一般从李代数的表示不能得到李群的表示, 但是当 G_0 连通且单连通时, 从 $\mathfrak{g}_0$ 的表示就可以得到 G_0 的表示.

如果 G_0 有两个表示 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (V_i 基域相同), 可定义表示 $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 如下:

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2, \quad \forall v_i \in V_i$$

即 $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$. 这个表示称为 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, v_2) 的 **Kronecker(张量) 积**.

$(\rho_1 \otimes \rho_2, v_1 \otimes v_2)$ 对应于 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 $(d(\rho_1 \otimes \rho_2), v_1 \times v_2)$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 (ρ_1, v_1) 与 (ρ_2, v_2) 的 Kronecker(张量) 积. 将 $d(\rho_1 \otimes \rho_2)$ 仍记为 $\rho_1 \otimes \rho_2$, 则

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(X) = \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X) + \rho_1(X) \otimes \mathrm{id}_{V_2}, \ \forall x \in \mathfrak{g}_0.$$

如果 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示, 自然地, 它也是 $\mathfrak{g}_0$ 的复化 $\mathfrak{g} = g_0^c$ 的复表示, 且有相同的可约性. 反之, 若 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的复表示, 自然 ρ 限制在 $\mathfrak{g}_0$, 就是 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示. 当然也有相同的可约性. 于是实李代数的复表示论问题就变成了其复化的复表示论的问题.

设 $\mathfrak{h}_0$ 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$. 于是有 $\mathfrak{g} = h + \sum\limits_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. 特别地, $\mathfrak{h}_0 = C(\mathfrak{g}_0) \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{h}_R$, $\mathfrak{h}_R$ 是由 Δ 张成的实线性空间.

定义 4.1.1　$\varphi \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 称为**整向量**, 如果 $\dfrac{2(\varphi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}$, $\forall \alpha \in \Delta$. $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中整向量 φ 称为**强整向量**, 若还满足 $\dfrac{2(\varphi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geqslant 0$, $\forall \alpha \in \Delta^+$.

如 $\alpha \in \Delta$, α 均是整向量. Δ 中最高根 φ_0 是强整向量.

定理 4.1.1 Π, W 分别为素根系、Weyl 群. $\varphi \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 则有

1) φ 是整向量当且仅当 $\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbf{Z}$, $\forall \alpha_i \in \Pi$;

2) φ 是整向量, 则 $\forall w \in W$, $w(\varphi)$ 亦为整向量;

3) 整向量 φ 是强整向量当且仅当 $\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \geqslant 0$, $\forall \alpha_i \in \Pi$.

证 1) φ 是整向量, 自然 $\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbf{Z}$. 反之, 若 $\alpha \in \Delta$, 则有 $w \in W$, $\alpha_i \in \Pi$ 使得 $w(\alpha) = \alpha_i$. 而对 $\alpha_j \in \Pi$, 有 $\frac{2(w_{\alpha_j}(\varphi),\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} - \frac{2(\varphi,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbf{Z}$. $\{w_{\alpha_j}\}$ 为 W 的生成元, 于是有 $\frac{2(\varphi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(w(\varphi),w(\alpha))}{(w(\alpha),w(\alpha))} = \frac{2(w(\varphi),\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbf{Z}$. 故 φ 是整向量.

2) $\forall \alpha\in\Delta, w\in W$, 有 $w(\alpha)\in\Delta$. 若 φ 是整向量, 则 $\frac{2(\varphi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(\varphi,w^{-1}(\alpha))}{(w^{-1}(\alpha),w^{-1}(\alpha))} \in \mathbf{Z}$, 故 $w(\varphi)$ 是整向量.

3) φ 是强整向量, 自然 $\forall \alpha_i \in \Pi$, $\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \geqslant 0$. 反之, 则由 $\forall \alpha \in \Delta^+$, 有 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$, $m_i \geqslant 0$. 于是 $\frac{2(\varphi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \sum\limits_{i=1}^{l}\frac{m_i(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha,\alpha)}\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \geqslant 0$. 因而 φ 是强整向量. □

设 G_0 是实连通紧李群, $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}G_0$, H_0 是 G_0 的 Cartan 子代数, $\mathfrak{h}_0 = \mathrm{Lei}H_0$, (ρ, V) 是复表示. 于是 V 上有不变内积. 故 $\rho(g) \in U(V)$. 因而可以对角化, 即 $\rho(g) = \mathrm{diag}(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_N})$, $N = \dim V$, 其中对角元素 $|e^{\mu_i}| = 1$, 即 μ_i 是纯虚数或 0.

对应于 $\mathfrak{g}_0$ 的表示, $X_0 \in \mathfrak{h}_0$, $\rho(X_0)$ 是反 Hermite 矩阵, 也可对角化. 由于 $\mathfrak{h}_0$ 可交换, 故可同时对角化: $\rho(X_0) = \mathrm{diag}(\mu_1(X_0), \cdots, \mu_N(X_0))$, $\mu_i(X_0)$ 是纯虚数. 故 μ_i 是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上的实线性函数. 因而用 $\mathfrak{g} = g_0^c$ 上的不变非退化对称双线性形, 可将 μ_i 嵌入 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中. 仍以 μ_i 表示之. 由此得 $V = \sum\limits_{\mu\in\Phi} V_\mu$, 其中 $V_\mu = \{v \in V | \rho(X_0)v = (\mu, X_0)v, \forall X_0 \in \mathfrak{h}_0\}$.

定义 4.1.2 V 中非零向量 v, 若满足 $\rho(X_0)v = (\mu, X_0)v$, $\forall X_0 \in \mathfrak{h}_0$, 则称 v 是属于权 μ 的**权向量**. V_μ 称为**权子空间**. $\dim V_\mu$ 称为权 μ 的**重数**. 所有权的集合 Φ 称为**权系**. 有时 μ 不是权. 也可记作 $\dim V_\mu = 0$.

定理 4.1.2 (ρ, V) 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示. $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{g} = g_0^c = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$, $V = \sum\limits_{\mu\in\Phi} V_\mu$. $\{e_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ 是 Weyl 基. 则有

1) $\rho(e_\alpha)V_\mu \subseteq V_{\alpha+\mu}$, $\forall \alpha \in \Delta$, $\mu \in \Phi$;

2) $\alpha \in \Delta$, $\mu \in \Phi$, μ 关于 α 的权链为 $\mu - p\alpha, \cdots, \mu-\alpha, \mu, \mu+\alpha, \cdots, \mu+q\alpha$,

即 $\mu+k\alpha\in\Phi, -p\leqslant k\leqslant q$, 而 $\mu-(p+1)\alpha,\ \mu+(q+1)\alpha\notin\Phi$. 则有 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$;

3) 权系 Φ 在 Weyl 群 W 作用下不变.

证 1) 取 $v\in V_\mu,\ x\in\mathfrak{h}_0$, 则有

$$\rho(x)\rho(e_\alpha)v=\rho([x,e_\alpha])v+\rho(e_\alpha)\rho(x)v=(\alpha,x)\rho(e_\alpha)v+(\mu,x)\rho(e_\alpha)v=(\mu+\alpha,x)\rho(e_\alpha)v.$$

即有 $\rho(e_\alpha)v\in V_{\mu+\alpha}$.

2) 取 $v\in V_\mu$. 分三种情况讨论.

(i) 若 $\rho(e_\alpha)v=0$. 令 $y_k=\rho(e_{-\alpha}^k)v,\ k=0,1,\cdots$. 于是 $y_k\in V_{\mu-k\alpha}$, 因而有 $p'\leqslant p$, 使得 $y_{p'}\neq 0$, 而 $y_{p'+1}=0$. 用归纳法可以证明

$$\rho(e_\alpha)y_{k+1}=(k+1)(\mu-\frac{k}{2}\alpha,\alpha)y_k,\ y=0,1,\cdots.$$

事实上, $k=0$ 时, 有 $\rho(e_\alpha)y_1=(\rho(\alpha)+\rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha))v=(\mu,\alpha)y_0$. 由 k 到 $k+1$, 有

$$\rho(e_\alpha)y_{k+1}=\rho(\alpha)y_k+\rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha)y_k=(k+1)(\mu-\frac{k}{2}\alpha,\alpha)y_k.$$

因而 $\{y_0,\cdots,y_{p'}\}$ 生成的子空间 V' 在 $\{\rho(e_\alpha),\rho(e_{-\alpha}),\rho(\alpha)\}$ 下不变. 故 $\mathrm{tr}\rho(\alpha)|_{V'}=\mathrm{tr}[\rho(e_\alpha),\rho(e_{-\alpha})]|_{V'}=0$. 而 $\mathrm{tr}\rho(\alpha)|_{V'}=\sum\limits_{k=0}^{p'}(\mu-k\alpha,\alpha)=(p'+1)(\mu,\alpha)-\dfrac{p'(p'+1)}{2}(\alpha,\alpha)$. 因此有 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p'\leqslant p$.

(ii) 若 $\rho(e_{-\alpha})v=0$, 则令 $z_k=\rho(e_\alpha)^k v$, 用上面同样的办法可得 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=-q'\geqslant -q$.

(iii) 一般, 取 $\mu_1=\mu+q\alpha$, 于是有 $\dfrac{2(\mu_1,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\leqslant p+q$, 因而 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\leqslant p-q$.

再取 $\mu_2=\mu-p\alpha$, 于是有 $\dfrac{2(\mu_2,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\geqslant -q-p$, 即有 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\geqslant p-q$. 故 2) 成立.

3) 只要证明$\forall\mu\in\Phi,\ w_\alpha\in W\ (\alpha\in\Delta),\ w_\alpha(\mu)\in\Phi$. 事实上 $w_\alpha(\mu)=\mu-\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\mu-(p-q)\alpha$, 而 $-p\leqslant-(p-q)\leqslant q$. 故 $w_\alpha(\mu)\in\Phi$. □

推论 任何权都是整向量.

定义 4.1.3 设 Φ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 (ρ,V) 的权系. 如果 $\lambda\in\Phi$, 满足 $\lambda+\alpha\notin\Phi,\quad\forall\alpha\in\Delta^+$, 则称为**最高权**.

一个表示的最高权必为强整向量.

定理 4.1.3 设 (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示. Φ 为权系. λ 为一最高权. 则有下面的结果:

1) $\forall \mu \in \Phi$, 则有 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s} \in \Pi$, 使 $\lambda, \lambda - \alpha_{i_s}, \cdots, \lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_s} = \mu \in \Phi$ (称 s 为 μ 的层数);

2) $\forall \mu \in \Phi$, $\mu \leqslant \lambda$;

3) (ρ, V) 的最高权唯一;

4) $\dim V_\lambda = 1$.

证 1) 设 $x_\lambda \in V_\lambda$, $x_\lambda \neq 0$. 设 V' 是 $\{\rho(e_{-\alpha_{j_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{j_t}}) x_\lambda | \alpha_{j_k} \in \Pi\}$ 生成的子空间. 显然 V' 在 $\rho(\mathfrak{h}_0)$ 与 $\rho(e_{-\alpha_i})(\alpha_i \in \Pi)$ 下不变. 注意到

$$\rho(e_{\alpha_i})\rho(e_{-\alpha_j}) = \delta_{ij}\rho(\alpha_i) + \rho(e_{-\alpha_j})\rho(e_{\alpha_i}), \ \rho(e_{\alpha_i})x_\lambda = 0,$$

因而 V' 在 $\rho(e_{\alpha_i})$ 下亦不变. 而 $e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}, \mathfrak{h}_0$ 生成 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$, 则 V' 在 $\rho(\mathfrak{g}_0)$ 下不变. 故 $V = V'$. 注意 $\rho(e_{-\alpha_{j_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{j_t}}) x_\lambda \in V_{\lambda - \alpha_{j_t} - \cdots - \alpha_{j_1}}$, 又 $V = \sum\limits_{\mu \in \Phi} V_\mu$, 因而 V_μ 由 $\{\rho(e_{-\alpha_{i_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{i_s}}) x_\lambda | \lambda - \alpha_{i_s} - \cdots - \alpha_{i_1} = \mu\}$ 生成. $\mu \in \Phi$, $\dim V_\mu \neq 0$, 因而有 $\rho(e_{-\alpha_{i_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{i_s}}) x_\lambda \neq 0$. 故 $\rho(e_{-\alpha_{i_k}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{i_s}}) x_\lambda \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant s$. 即 $\lambda - \alpha_{i_s}, \lambda - \alpha_{i_s} - \alpha_{i_{s-1}}, \cdots, \lambda - \alpha_{i_s} - \cdots - \alpha_{i_1} = \mu$ 均为权.

2) 由 1) 知 $\forall \mu \in \Phi$, $\mu \leqslant \lambda$.

3) 若另有最高权 $\tilde{\lambda}$, 则 $\tilde{\lambda} \leqslant \lambda$, $\lambda \leqslant \tilde{\lambda}$, 故 $\lambda = \tilde{\lambda}$, 即最高权唯一.

4) 由 1) 知 $V_\lambda = \sum\limits_{\lambda - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_s} = \lambda} \{a_{i_1 \cdots i_s} \rho(e_{-\alpha_{i_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{i_s}}) x_\lambda\}$, 因而 $s = 0$, 故 $V_\lambda = \mathbf{C} x_\lambda$ 即 $\dim V_\lambda = 1$. □

定义 4.1.4 Φ 为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 (ρ, V) 权系, $\Phi = \Delta^0 \cup \Delta^1 \cup \cdots \cup \Delta^{T(\rho)}$, Δ^S 为 Φ 中所有 s 层权, 称 $T(\rho)$ 为 (ρ, V) 的**高度**. 当高度 $T(\rho)$ 为偶数时, (ρ, V) 称为**偶型表示**; 当高度 $T(\rho)$ 为奇数时, (ρ, V) 称为**奇型表示**.

定理 4.1.4 设 $\mathfrak{h}_0$ 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数. Δ 为对应的根系, $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为一素根系. (ρ_i, V_i) 是 $\mathfrak{h}_0$ 的不可约复表示, $i = 1, 2$, 其中, Φ_i, λ_i 分别为其权系、最高权. 则下面三个条件等价:

1) (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 等价, 记为 $\rho_1 \sim \rho_2$;

2) $\Phi_1 = \Phi_2$;

3) $\lambda_1 = \lambda_2$.

证 1) $\Longrightarrow$ 2) 由 $\rho_1 \sim \rho_2$ 知, 有 V_1 到 V_2 的线性同构映射 $\mathcal{A}$ 满足 $\forall x \in \mathfrak{g}_0$, $\mathcal{A}\rho_1(x) = \rho_2(x)\mathcal{A}$. 又 $V_i = \sum\limits_{\mu \in \Phi_i} V_\mu^{(i)}$, 对 $v \in V_\mu^{(1)}$, 则由 $\rho_2(x)\mathcal{A}v = \mathcal{A}\rho_1(x)v = (\mu, x)\mathcal{A}v$, $\forall x \in \mathfrak{h}_0$, 知 $\mathcal{A}v \in V_\mu^{(2)}$. 即由 $\mu \in \Phi_1$, 有 $\mu \in \Phi_2$, 故 $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$. 同理 $\Phi_1 \supseteq \Phi_2$, 故 $\Phi_1 = \Phi_2$.

2)$\Longrightarrow$ 3) 因为 $\Phi_1 = \Phi_2$, Φ_i 是不可约表示的权系, 故首权唯一. 又 $\mu \in \Phi_1 = \Phi_2$, $\mu \leqslant \lambda_i$, 故 $\lambda_1 = \lambda_2$.

3)$\Longrightarrow$ 1) 设 $\lambda_1=\lambda_2$, 在 $V_\lambda^{(i)}$ 中取非零向量 v_i. 由定理 4.4.3 的证明知, V_1 有元素形如 $\rho_1(e_{-\alpha_{i_1}})\cdots\rho(e_{-\alpha_{i_s}})v_1$ 的基, 于是有 V_1 到 V_2 的线性映射 $\mathcal{A}$ 满足:

$$\mathcal{A}\rho_1(e_{-\alpha_{i_1}})\cdots\rho_1(e_{-\alpha_{i_s}})v_1=\rho_2(e_{-\alpha_{i_1}})\cdots\rho_2(e_{-\alpha_{i_s}})v_2.$$

$\forall\alpha_k,\alpha_l\in\Pi$, 有 $\rho_i(e_{\alpha_k})\rho_i(e_{-\alpha_l})=\delta_{kl}\rho_i(\alpha_k)+\rho_i(e_{-\alpha_l})\rho_i(e_{\alpha_k})$, $\rho_i(e_{\alpha_k})v_i=0$. 故 $\rho_2(x)\mathcal{A}=\mathcal{A}\rho_1(x),\forall x\in\mathfrak{g}_0$. 注意到 $\ker\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(V_1)$ 分别是 V_1, V_2 的不变子空间, ρ_i 不可约, $\mathcal{A}\neq 0$, 故是线性同构, 即 $\rho_1\sim\rho_2$. □

定理 4.1.5 $\mathfrak{g}_0$ 紧半单, $\mathfrak{h}_0$ 为其 Cartan 子代数, Δ,Π 分别为根系、素根系. 设 $h=\sum m_i\alpha_i\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 满足 $(h,\alpha_i)=2$. 若 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示 (ρ,V) 的最高权为 λ, 则 $T(\rho)=(\lambda,h)$.

证 设 $\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 是 Weyl 基. 令 $h=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$, $e_+=\sum\limits_{i=1}^{l}m_ie_{\alpha_i}$, $e_-=\sum\limits_{i=1}^{l}e_{-\alpha_i}$, 则有 $[h,e_+]=2e_+$, $[h,e_-]=-2e_-$, $[e_+,e_-]=h$. 令 $\mathfrak{g}_1$ 是 h,e_+,e_- 生成 $\mathfrak{g}_0^c$ 的子代数. 于是 (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}_1$ 的复表示, 为不可约子表示之和. 若 (ρ_0,V_0) 是一个不可约子表示, 则 $\rho_0(h)$ 之特征根为 $2k,2k-2,\cdots,-2k$.

另一方面, $\rho(h)$ 在 V_μ 上特征根为 $(h,\mu)=(h,\lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s})=(h,\lambda)-2s\leqslant(\lambda,h)$. 对 V_λ 生成的 $\mathfrak{g}_1$ 的不变子空间, $\rho(h)$ 有特征根 $-(h,\lambda)$. 于是有 $\mu'\in\Phi$, 使得 $\mu'\in\Phi^{s'}$, 故 $-(h,\lambda)=(\mu',h)=(\lambda,h)-2s'$. 因而 $s'=(\lambda,h)$. 于是 $\forall\mu\in\Phi^s$, 有 $-(\lambda,h)\leqslant(\mu,h)=(\lambda,h)-2s$. 故 $s\leqslant(\lambda,h)$. 即 (λ,h) 是最高层的权. 即 $T(\rho)=(\lambda,h)$ □

推论 $\mu\in\Phi$, $\mu=\sum\limits_{i=1}^{l}q_i\alpha_i$, 则 $2\sum\limits_{i=1}^{l}q_i\equiv T(\rho)\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

证 注意, $2\sum\limits_{i=1}^{l}q_i=\sum\limits_{i=1}^{l}q_i(\alpha_i,h)=(\mu,h)=T(\rho)-2s$, 其中 s 为 μ 的层数. □

定理 4.1.6 设 (ρ_i,V_i), $i=1,2$, 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的两个表示, Φ_i 是 (ρ_i,V_i) 的权系. 则有

1) $(\rho_1\otimes\rho_2,V_1\otimes V_2)$ 的权系 $\Phi=\{\mu_1+\mu_2|\mu_i\in\Phi_i\}=\Phi_1+\Phi_2$;

2) 若 (ρ_i,V_i) 不可约, 则 $(\rho_1\otimes\rho_2,V_1\otimes V_2)$ 中有一个不可约子表示, 其最高权为 $\lambda_1+\lambda_2$. 其中 λ_i 是 (ρ_i,V_i) 的最高权.

证 1) 设 V_i 有权空间分解 $V_i=\sum\limits_{\mu_i\in\Phi_i}V_{\mu_i}^{(i)}$, 于是 $V=V_1\otimes V_2=\sum\limits_{\mu_i\in\Phi_i}V_{\mu_1}^{(1)}\otimes V_{\mu_2}^{(2)}$. 又因为 $\forall v_i\in V_{\mu_i}^{(i)}$, $h\in\mathfrak{h}_0$, 有 $\rho_i(h)v_i=(\mu_i,h)v_i$, 因而有 $(\rho_1\otimes\rho_2)(h)(v_1\otimes v_2)=(\mu_1+\mu_2,h)(v_1\otimes v_2)$. 即有 $V_{\mu_1}^{(1)}\otimes V_{\mu_2}^{(2)}\subseteq V_{\mu_1+\mu_2}$, 由此有 $V=\sum\limits_{\mu\in\Phi}V_\mu$, $V_\mu=\sum\limits_{\mu_1+\mu_2=\mu}V_{\mu_1}^{(1)}\otimes V_{\mu_2}^{(2)}$. 故 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$.

2) 令 (ρ_i, V_i) 不可约, 故 $\mu_i \in \Phi_i$, 有 $\mu_i \leqslant \lambda_i$. 于是 $\mu_1 + \mu_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2$. 因而 $\lambda_1 + \lambda_2$ 是 $\Phi_1 + \Phi_2$ 中的最高权, 而且 $V_{\lambda_1+\lambda_2} = V_{\lambda_1}^{(1)} \otimes V_{\lambda_2}^{(2)}$, $\dim V_{\lambda_1+\lambda_2} = \dim V_{\lambda_1}^{(1)} \cdot \dim V_{\lambda_2}^{(2)} = 1$. 在 $V_{\lambda_1+\lambda_2}$ 中取非零向量 $v_1 \otimes v_2$, $v_i \in V_{\lambda_i}^{(i)}$. 则由 $\{\rho(e_{-\alpha_{i_1}}) \cdots \rho(e_{-\alpha_{i_s}}) v_1 \otimes v_2\}$ 生成的子空间 $\bar{V}$ 是 $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ 的不变子空间. 记 $\bar{\rho} = \rho|_{\bar{V}}$. 于是 $(\bar{\rho}, \bar{V})$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的表示, $\lambda_1 + \lambda_2$ 是最高权. 且 $\bar{V}$ 是包含 $v_1 \otimes v_2$ 的最小不变子空间. 若 $\bar{V}$ 可约, 则有 $\bar{V} = W_1 \oplus W_2$, W_1, W_2 均非零. 于是有 $u_i \in W_i$ 使得 $v_1 \otimes v_2 = u_1 + u_2$. 又若 $h \in \mathfrak{h}_0$, 有 $\bar{\rho}(h)u_1 + \bar{\rho}(h)u_2 = \bar{\rho}(h)(v_1 \otimes v_2) = (\lambda_1 + \lambda_2, h)u_1 + (\lambda_1 + \lambda_2, h)u_2$. 因而 $\bar{\rho}(h)u_i = (\lambda_1 + \lambda_2, h)u_i$. 而 $\dim V_{\lambda_1+\lambda_2} = 1$, 产生矛盾. 故 $(\bar{\rho}, \bar{V})$ 不可约, 最高权为 $\lambda_1 + \lambda_2$. □

定义 4.1.5 设 $\mathfrak{h}_0$ 是紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数, Δ, Π 分别为根系、素根系. 满足 $\dfrac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}(j = 1, 2, \cdots, l;\ \alpha_j \in \Pi)$ 的强整向量叫做第 i 个**基本强整向量**.

命题 4.1.1 以 λ_i 为最高权的不可约复表示存在唯一, 称为第 i 个**基本表示**. 此命题可用纯李代数的方法证明, 可见参考文献 [2], 在此证明略去.

习　题

1. 1) 证明 Lie$SU(2) = su(2)$ 的复化为 $sl(2, \mathbf{C})$, 且 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为基.

   2) 给出上述基的换位关系, 并证明可取 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h} = \mathbf{C}\alpha$.

   3) 证明 $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 为整向量, 则 $\mu = k\alpha$, k 为整数或半整数; $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 为强整向量, 则 $\lambda = k\alpha$, $k \geqslant 0$, k 为整数或半整数.

   4) λ 为 $su(2)$ 不可约表示 (ρ, V) 的最高权. 求权系, 权子空间维数, $\dim V$, $\rho(\alpha)$ 的特征根,$T(\rho)$ 及 (ρ, V) 的型.

2. 1) 证明半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的基本强整向量 λ_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ 是 Cartan 子代数的基.

   2) 证明半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的整向量可以表示为基本强整向量的整系数的线性组合.

   3) 设 λ 为半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的强整向量. 证明存在 $\mathfrak{g}$ 的不可约子表示 (ρ, V) 以 λ 为最高权.

4.2 对偶表示

本节讨论对偶表示与表示空间上的不变双线性函数.

定理 4.2.1 设 (ρ, V) 是连通李群 G_0 的有限维表示, 对应 G_0 的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的表示也记为 (ρ, V). V^* 为 V 的对偶空间. 则由 $(\rho^*(g)f)(v) = f(\rho(g^{-1})v)$, $\forall g \in G_0, f \in V^*, v \in V$ 得到 G_0 的表示 (ρ^*, V^*), 称为 (ρ, V) 的**对偶表示**.

此表示相应李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 (ρ^*, V^*) 为 $(\rho^*(x)f)(v) = -f(\rho(x)v)$, $\forall x \in \mathfrak{g}_0, f \in V^*, v \in V$.

若 V_1 是 V 的不变子空间, 则 $\bar{V}^* = \{f \in V^* | f(V_1) = 0\}$ 是 V^* 的不变子空间.

证 设 $f_1, \cdots, f_n$ 是 V^* 对于 V 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基. 若 $\rho(g)$ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A, 则 $\rho^*(g^{-1})$ 在 $f_1, \cdots, f_n$ 下的矩阵为 A'. 由此可知 (ρ^*, V^*) 为 G_0 的表示. V_1 为 V 的不变子空间. 若 $f(V_1) = 0$, 则 $(\rho^*(g)f)(V_1) = f(\rho(g^{-1}V_1)) = f(V_1)=0$. 故 $\bar{V}^*$ 是 V^* 的不变子空间.

设 $x \in \mathfrak{g}_0$, $f \in V^*$, $v \in V$, 则

$$(\rho^*(x)f)v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\rho^*(\exp tx)^{-1}f)v\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f(\rho(-\exp tx)v)\bigg|_{t=0} = -f(\rho(x)v). \qquad \square$$

定理 4.2.2 设 (ρ^*, V^*) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ, V) 的对偶表示. 则 ρ 与 ρ^* 等价的充分必要条件是 V 上存在非退化的不变双线性函数.

证 若 ρ 与 ρ^* 等价, 则有 V 到 V^* 上的线性同构 ξ, 使得 $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\xi\rho(x) = \rho^*(x)\xi$. 在 V 上定义二元函数: $f(u, v) = \xi(u)(v)$, $\forall u, v \in V$. 显然, f 是双线性的. 如果 $u \in V, \forall v \in V$, 有 $f(u, v) = \xi(u)v = 0$, 因而 $\xi(u) = 0$, 由于 ξ 为同构, 故 $u = 0$.

又若 $v \in V$, $\forall u \in V$, 有 $f(u, v) = \xi(u)(v) = 0$, 故 $\{\xi(u)|u \in V\} = V^*$, 因此 $v = 0$. 所以 f 是非退化的.

对于任一 $x \in \mathfrak{g}$, 有 $f(\rho(x)u, v) = (\xi(\rho(x)u))v = (\rho^*(x)\xi u)(v) = -(\xi u)(\rho(x)v) = -f(u, \rho(x)v)$. 即 f 是 V 上不变双线性函数且非退化.

设 $f(u, v)$ 是 V 上非退化不变双线性函数. 由 $f_v(u) = f(v, u)$ 定义的 $f_v \in V^*$, 作 V 到 V^* 的映射: $\xi(v) = f_v$. 显然 ξ 是线性的, 且若 $\xi(v) = 0$, 则 $f_v(u) = f(v, u) = 0$, $\forall u \in V$. 故由 f 之非退化得 $v = 0$. 因而 ξ 是一一的. 又 V, V^* 是有限维的, 故 ξ 是同构映射.

设 $x \in \mathfrak{g}$, 于是 $(\xi\rho(x)v)(u) = f_{\rho(x)v}(u) = f(\rho(x)v, u) = -f(v, \rho(x)u) = -f_v(\rho(x)u) = (\rho^*(x)f_v)(u) = (\rho^*(x)\xi v)(u)$. 即 $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\xi\rho(x) = \rho^*(x)\xi$. 故 (ρ, V), (ρ^*, V^*) 等价. $\square$

$\mathfrak{g}$ 的不可约表示 (ρ, V) 的不变双线性函数有下面定理.

定理 4.2.3 设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 则

1) V 上不变双线性函数 $f \neq 0$, 则 f 非退化; 因之 (ρ, V) 与 (ρ^*, V^*) 等价之充要条件是 V 上有不变双线性函数 $f \neq 0$;

2) 当 $\mathfrak{g}$, (ρ, V) 的基域为 $\mathbf{C}$ 时, $f \neq 0, F$ 是 V 上不变双线性函数, 则 $F = cf$, c 是常数, 且 f 对称或者反对称.

证 1) 令 $V_1 = \{v \in V | f(v, V) = 0\}$, $V_2 = \{u \in V | f(V, u) = 0\}$. 因为 $f \neq 0$, 故 $V_i \neq V$. 由 f 是不变双线性函数, 故 $\forall v \in V_1$, $u \in V_2$, $w \in V$ 有 $f(\rho(x)v, w) = -f(v, \rho(x)w) = 0$, $f(w, \rho(x)u) = -f(\rho(x)w, u) = 0$. 即 V_1, V_2 均是不变子空间. 因为 (ρ, V) 不可约, 故 $V_1 = V_2 = \{0\}$. 即 f 非退化.

2) 设 f, F 是不变双线性函数. 若 $F = 0$, 则 $F = 0f$. 故设 $F \neq 0$, 因而非退化. 由定理 4.2.1 的证明知, 有 V 到 V^* 的线性同构 ξ, η 满足 $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\xi\rho(x) = \rho^*(x)\xi$, $\eta\rho(x) = \rho^*(x)\eta$. 从而 $\xi^{-1}\eta\rho(x) = \xi^{-1}\rho^*(x)\eta = \rho(x)\xi^{-1}\eta$. 由 Schur 引理, 知 $\xi^{-1}\eta = c\mathrm{id}_V$. 故 $\eta = c\xi$. 所以 $F = cf$.

$f \neq 0$ 不变. 令 $F(u, v) = f(v, u)$. 显然 $F(u, v)$ 也是不变双线性函数. 故 $F = cf$, 亦即 $f(v, u) = cf(u, v) = c^2 f(v, u)$. 因 $f \neq 0$, 故 $c^2 = 1$. 即有 $f(v, u) = \pm f(u, v)$. □

定理 4.2.4 设 (ρ^*, V^*) 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示 (ρ, V) 的对偶表示. 又设 $\mathfrak{h}_0$, Δ, Π 分别是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数、根系、素根系. Φ, Φ^* 分别为 ρ, ρ^* 的权系. 则有下面结论:

1) $\Phi^* = -\Phi$;

2) 当 (ρ, V) 不可约, 且 λ 为最高权时, (ρ, V) 与 (ρ^*, V^*) 等价当且仅当 V 上有非零不变双线性函数 f, 当且仅当 $-\lambda$ 为 Φ 的最低权. 而且 f 对称或反对称, 则 $T(\rho)$ 相应为偶数或奇数.

证 1) 在 V 取一组权向量 $e_1, \cdots, e_n$ 为基. 于是 $\rho(x)$ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\mu_1(x), \cdots, \mu_n(x))$, $\forall x \in \mathfrak{h}_0$. $\rho^*(x)$ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-\mu_1(x), \cdots, -\mu_n(x))$. 故 $\Phi^* = -\Phi$.

2) 由定理 4.2.2 及定理 4.2.3, 知 $\rho \sim \rho^*$ 当且仅当 V 上有非零不变双线性函数 f. 注意到 $-\lambda$ 是 $-\Phi$ 中最低权. 若 ρ 与 ρ^* 等价, 则 $\Phi = -\Phi$, 故 $-\lambda$ 是 Φ 的最低权. 反之, $-\lambda$ 若为 Φ 的最低权, 则 $-(-\lambda) = \lambda$ 是 $-\Phi$ 的最高权. 因而 ρ 与 ρ^* 有相同的最高权, 故等价.

取 $h \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 使 $(h, \alpha_i) = 2$. 设 $h = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i \alpha_i$, $e_+ = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i e_{\alpha_i}$, $e_- = \sum\limits_{i=1}^{l} e_{-\alpha_i}$. 取 $x_\lambda \in V_\lambda$, 令 $\xi_i = \rho(e_-)^i x_\lambda$ $(i = 0, 1, \cdots)$. 则有 $\rho(h)\xi_i = (T(\rho) - 2i)\xi_i$, $\xi_{T(\rho)+1} = 0$. 令 V_0 是由 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{T(\rho)}$ 张成的子空间. 记 $V_1 = \{v \in V | f(V_0, v) = 0\}$. 由 f 非退化, 因而有 $V = V_0 \dot{+} V_1$, 即有 $f(\xi_i, V_1) = 0$. 又有 $0 = f(\rho(h)\xi_i, \xi_j) + f(\xi_i, \rho(h)\xi_j) = 2(T(\rho) - i - j)f(\xi_i, \xi_j)$. 因而当 $i + j \neq T(\rho)$ 时, 有 $f(\xi_i, \xi_j) = 0$. 又 f 非退化,

故 $f(\xi_i, \xi_{T(\rho)-i}) \neq 0$. 又从 f 的不变性及 $\xi_{T(\rho)} = \rho(e_-)^{T(\rho)}\xi_0$, 得 $f(\xi_0, \xi_{T(\rho)}) = (-1)^{T(\rho)} f(\xi_{T(\rho)}, \xi_0)$. 由此得 f 对称 (反对称), 则 $T(\rho)$ 为偶数 (奇数). □

定理 4.2.5 设 (x_0, y_0), $B(x_0, y_0)$ 是紧单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 上不变内积 Killing 型. 则 $(x_0, y_0) = cB(x_0, y_0)$, 其中 $c < 0$, 为常数.

证 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$, 故 (x_0, y_0) 与 $B(x_0, y_0)$ 均可扩充为 $\mathfrak{g}$ 上的非零不变双线性函数, 又因 $\mathfrak{g}_0$ 是单的, 故 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是不可约复表示. 由定理 4.2.2, 有常数 c, 使 $(x_0, y_0) = cB(x_0, y_0)$, 由 $B(x_0, x_0)$ 负定, (x_0, y_0) 正定, 故 $c < 0$. □

4.3 紧李群复表示的表示函数与特征

在第 3 章中我们知道, 若 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是实连通紧李群 G_0 的 Maurer-Cartan 形式. 对任何常数 λ_0, $\lambda_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 是不变 n 次微分形式. 可选 λ_0 使得 G_0 上不变积分 $\int_{G_0} \lambda_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = 1$. 记 $dg = \dot{G}_0 = \lambda_0\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$.

以 $L^2(G_0)$ 表示 G_0 上平方可积的复值函数集合, 这是无限维复线性空间. 在 $L^2(G_0)$ 中引进定义内积 $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{G_0} f_1(g)\overline{f_2(g)}dg, \forall f_1, f_2 \in L^2(G_0)$. 则有 $\langle f_1, f_2\rangle = \overline{\langle f_2, f_1\rangle}$; $\langle af_1 + bf_2, f_3\rangle = a\langle f_1, f_3\rangle + b\langle f_2, f_3\rangle$; $\langle f, f\rangle \geqslant 0$, 等号成立当且仅当 f 几乎处处为零. 因而, 若把几乎处处相等的函数视为同一函数, 则 $L^2(G_0)$ 为内积空间, 其范数为 $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. 可以证明 $L^2(G_0)$ 为 Hilbert 空间, 即完备的内积空间.

设 (ρ, V) 是 G_0 的复表示. 则在 V 中有对 $\rho(G_0)$ 不变的内积. 对此内积有 V 的标准正交基. 在此基下, $\forall g \in G$, $\rho(g)$ 的矩阵 $(\rho_{ij}(g)) \in U(V)$. $\rho_{ij}(g)$ 称为 (ρ, V) 的**表示函数**, $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\rho(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{ii}(g)$ 为 (ρ, V) 的**特征** (**特征标**).

引理 4.3.1 设 (ρ, V) 为实连通紧李群 G_0 的 m 维不可约复表示. $\rho_{ij}(g)$, $\chi_\rho(g)$ 分别为表示函数、特征. 则有 $\langle \rho_{ij}, \rho_{kl}\rangle = \dfrac{1}{m}\delta_{ik}\delta_{jl}$, $\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle = 1$.

证 取 $\mathcal{A} \in gl(V)$, 令 $\mathcal{B} = \int_{G_0} \rho(g)\mathcal{A}\rho(g^{-1})dg$. 则 $\rho(g_0)\mathcal{B}\rho(g_0^{-1}) = \int_{G_0} \rho(g_0)\rho(g)\mathcal{A}\rho(g^{-1})\rho(g_0^{-1})dg = \mathcal{B}$, $\forall g_0 \in G_0$. 由 Schur 引理, $\int_{G_0} \rho(g)\mathcal{A}\rho(g^{-1})dg = c(\mathcal{A})\mathrm{id}_V$. 等式两边求迹, 可得 $c(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{m}\mathrm{tr}\mathcal{A}$.

注意到 $\rho(g)^{-1} = \overline{\rho(g)'}$, 设 $\mathcal{A} = (a_{pq}) = E_{jl}$ (第 j 行, l 列处为 1, 其余为 0), 有 $\dfrac{1}{m}\delta_{ik}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jj} = \sum\limits_{p,q=1}^{m}\int_{G_0} \rho_{ip}(g)a_{pq}\overline{\rho_{kq}(g)}dg = \int_{G_0} \rho_{ij}(g)\overline{\rho_{kl}(g)}dg = \langle \rho_{ij}, \rho_{kl}\rangle$. 且 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \langle \rho_{ii}, \rho_{jj}\rangle = 1$. □

引理 4.3.2 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ 为实连通紧李群 G_0 的二不等价不可约复表示, 且其表示函数分别为 $\rho_{ij}^{(k)}(g), k=1,2$. 则 $\langle \rho_{ij}^{(1)}, \rho_{kl}^{(2)} \rangle = \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 0$.

证 设 $\mathcal{A}$ 是 V_2 到 V_1 的线性映射,于是 $\mathcal{B} = \int_{G_0} \rho^{(1)}(g)\mathcal{A}\rho^{(2)}(g^{-1})dg$ 也是 V_2 到 V_1 的线性映射, 且 $\forall g \in G_0$, $\rho_1(g_0)\mathcal{B}\rho_2(g_0)^{-1} = \mathcal{B}$. 由 ρ_1 与 ρ_2 不等价, 故 $\mathcal{B} = 0$. 设 $\mathcal{A}$ 的矩阵为 $(a_{pq}) = E_{jl}$, 则有 $0 = \sum\limits_{p,q} \int_{G_0} \rho_{ip}^{(1)}(g) a_{pq} \overline{\rho_{kq}^{(2)}}(g) dg = \langle \rho_{ij}^{(1)}, \rho_{kl}^{(2)} \rangle$. 由此 $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 0$. □

下面我们讨论特征的一些性质.

定义 4.3.1 $F \in L^2(G_0)$, 如果满足 $\forall g, g_0 \in G_0$, $F(gg_0g^{-1}) = F(g_0)$, 则称为 G_0 上的**类函数**. 以 $L_0^2(G_0)$ 表示 $L^2(G_0)$ 中的类函数的集合.

定理 4.3.1 设 χ_ρ 为实连通紧李群 G_0 的表示 (ρ, V) 的特征. 则 $\chi_\rho \in L_0^2(G_0)$, 且 $\chi_{\rho_1+\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$, $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.

又 ρ_1 与 ρ_2 等价当且仅当 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. 若 $\rho = \rho_1^{(1)} + \cdots + \rho_{n_1}^{(1)} + \cdots + \rho_1^{(t)} + \cdots + \rho_{n_t}^{(t)}$, 其中 $\rho_j^{(i)}$ 为 G_0 的不可约复表示, 且上标相同的等价, 上标不同的不等价, 则 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum\limits_{i=1}^t n_i^2$.

证 $\forall g, g_1 \in G_0$, 有 $\chi_\rho(g_1gg_1^{-1}) = \mathrm{tr}\rho(g_1gg_1^{-1}) = \chi_\rho(g)$, 即 $\chi_\rho \in L_0^2(G_0)$. 由表示直和、张量积的定义性质知 $\chi_{\rho_1+\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$, $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.

若 ρ_1 与 ρ_2 等价, 有 V_1 到 V_2 的线性同构 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}\rho_1(g) = \rho_2(g)\mathcal{A}$. 由此 $\chi_{\rho_2}(g) = \mathrm{tr}\mathcal{A}\rho_1(g)\mathcal{A}^{-1} = \chi_{\rho_1}(g)$. 反之, $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$, 设 $\rho_1 = \rho_1^{(1)} + \cdots + \rho_{n_1}^{(1)} + \cdots + \rho_1^{(t)} + \cdots + \rho_{n_t}^{(t)}$, $\rho_2 = \rho_1^{(1)} + \cdots + \rho_{m_1}^{(1)} + \cdots + \rho_1^{(t)} + \cdots + \rho_{m_t}^{(t)}$, 其中 $\rho_j^{(i)}$ 为不可约表示, 上标相同等价, 不同不等价; 若 ρ_k 中不含与 $\rho_j^{(i)}$ 等价的子表示, 则理解 n_i 或 m_i 为零. 因而有 $\chi_{\rho_1} = \sum\limits_{i=1}^t n_i \chi_{\rho_1^{(i)}}$, $\chi_{\rho_2} = \sum\limits_{i=1}^t m_i \chi_{\rho_1^{(i)}}$. 故有 $n_i = \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1^{(i)}} \rangle = \langle \chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_1^{(i)}} \rangle = m_i$. 所以 ρ_1 与 ρ_2 等价. 由 $\rho = \rho_1^{(1)} + \cdots + \rho_{n_1}^{(1)} + \cdots + \rho_1^{(t)} + \cdots + \rho_{n_t}^{(t)}$, 得 $\chi_\rho = \sum\limits_{i=1}^t n_i \chi_{\rho_1^{(i)}}$ 于是 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant t} n_i n_j \langle \chi_{\rho_1^{(i)}}, \chi_{\rho_1^{(j)}} \rangle = \sum\limits_{i=1}^t n_i^2$. □

定理 4.3.2 (Peter-Weyl) $\mathrm{Irr}(G_0, \mathbf{C})$ 为实连通紧李群 G_0 的所有不等价的复不可约表示的集合, e 为 G_0 的单位元. 则 $\{\rho_{ij}/\sqrt{\chi_\rho(e)} \mid \rho \in \mathrm{Irr}(G_0, \mathbf{C})\}$ 为 $L^2(G_0)$ 的一组标准正交基, $\{\chi_\rho \mid \rho \in \mathrm{Irr}(G_0, \mathbf{C})\}$ 构成 $L_0^2(G_0)$ 的一组标准正交基.

证 显然 $\{\rho_{ij}/\sqrt{\chi_\rho(e)}\}$ 是相互正交的并且长度都是 1. 设 $f \in L^2(G)$, 并且取定 $\varepsilon > 0$. 于是由于 G 上的连续函数空间在 $L^2(G)$ 中是稠密的, 因此存在 G 上的连续函数 f_1 使得 $||f - f_1|| = \sqrt{\int_G |(f(g) - f_1(g)|^2 dg} < \frac{1}{2}\varepsilon$. 由于 G 是紧群, 所

以 f_1 是一致连续函数, 因此在 G 中存在单位元 e 的一个邻域 U, 使得 $U^{-1}=U$, 并且当 $x^{-1}y\in U$ 时, $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 设 $\delta: G\to[0,\infty)$ 为连续函数使得 $\mathrm{Support}\delta\subset U$, $\delta(x)=\delta(x^{-1})$, $\int_G\delta(g)dg=1$. 对于 G 上任意的连续函数 h, 定义 $Kh(g)=\int_G\delta(x)h(gx)dx=\int_G\delta(g^{-1}x)h(x)dx=\int_G h(x)\delta(x^{-1}g)dx$. 显然 Kh 也是 G 上的连续函数, 因此, K 是从 G 上的连续函数空间到 G 上的连续函数空间的线性算子. 当 $\delta(x)\neq 0$ 时, 有 $|f_1(gx)-f(g)|<\dfrac{1}{2}\varepsilon$, 于是由 $\int_G\delta(x)dx=1$, 有 $||Kf_1-f_1||=\sqrt{\int_G|Kf_1(g)-f_1(g)|^2dg}=\sqrt{\int_G\left|\int_G\delta(x)(f(gx)-f_1(g))dx\right|^2dg}\leqslant\sqrt{\int_G\left|\int_G\dfrac{1}{2}\varepsilon\delta(x)dx\right|^2dg}=\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 因此我们有 $||Kf_1-f||<\varepsilon$. 由泛函分析的知识可得 K 是紧算子, 并且由 $\delta(x)=\delta(x^{-1})$ 可知 K 是对称的. 设 $y\in G$, 于是有 $K(yh)(g)=\int_G h(y^{-1}x)\delta(x^{-1}g)dx=\int_G h(x)\delta(x^{-1}y^{-1}g)dx=(yKh)(g)$. 即 K 的任意特征子空间在 G 作用下不变. 设 $\lambda_n, n\geqslant 1$ 和 $\lambda_0=0$ 是 K 的特征值, H_n 为对应的特征子空间. 由泛函分析的内容可知, 对于上述的紧对称算子 K, $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}H_n$ 在连续函数空间中是稠密的, 因此 $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}KH_n$ 在 K 作用在连续函数空间的像中也是稠密的. 显然, $KH_0=0$, 且当 $n\geqslant 1$ 时, $KH_n=H_n$ 是在 G 作用下不变和有限维的, 于是 H_n $(n\geqslant 1)$ 在表示函数生成的空间中. 由于 Kf_1 包含在 $\bigoplus\limits_{n\geqslant 1}H_n$ 闭包中, 于是 Kf_1 可以由表示函数来逼近, 故第一个结论成立.

设 $\rho\in\mathrm{Irr}(G_0,\mathbf{C})=P$, ρ_{ij} 为对应的表示函数, 则 $\forall f\in L^2(G_0)$, 有 $f(g)=\sum\limits_{\rho\in P}\sum\limits_{i,j=1}^{m}a_{ij}\rho_{ij}(g)=\sum\limits_{\rho\in P}\mathrm{tr}(\rho(g)A_\rho)$, 其中 $A_\rho=(a_{ij})$ 为 $m=\chi_\rho(e)$ 阶方阵. 令 $f\in L_0^2(G_0)$, 则有 $f(g_1gg_1^{-1})=f(g)$ 成立. 所以 $f(g)=\sum\limits_{\rho\in P}\mathrm{tr}(\rho(g_1gg_1^{-1})A_\rho)=\sum\limits_{\rho\in P}\mathrm{tr}(\rho(g)\rho(g_1)^{-1}A_\rho\rho(g_1))$, 因而有 $\sum\limits_{\rho\in P}\mathrm{tr}(\rho(g)\mathcal{B})=\sum\limits_{\rho\in P}\sum\limits_{i,j=1}^{m}\rho_{ij}(g)b_{ij}=0$, 其中 $\mathcal{B}=\rho(g_1)^{-1}A_\rho\rho(g_1)-A_\rho=(b_{ij})$. 由第一个结论, 有 $b_{ij}=\sqrt{m}\langle 0,\rho_{ij}\rangle=0$, 因而 $\rho(g_1)^{-1}A_\rho\rho(g_1)=A_\rho$, $\forall g_1\in G_0$. 由 Schur 引理, 有 $A_\rho=c_\rho\mathrm{id}_V$, 故得 $f(g)=\sum\limits_{\rho\in P}c_\rho\chi_\rho(g)$. 于是第二个结论成立. □

习 题

1. 证明 G_0 的复表示 (ρ, V) 中包含与不可约复表示 (ρ_0, V_0) 等价的子表示的个数 $n_0 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_0} \rangle$.

2. 证明 (ρ, V) 不可约当且仅当 $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$.

3. 设 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) 分别为实连通紧李群 G_1, G_2 的不可约复表示. 证明由 $\rho(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$ 定义了 $G_0 = G_1 \otimes G_2$ (直积) 的不可约复表示 $(\rho, V_1 \otimes V_2)$. 反之, G_0 的不可约复表示 (ρ, V) 均等价于这类表示.

4. 证明 n 维实环面 $\dfrac{\mathbf{R}^n}{\mathbf{Z}^n}$ 的不可约复表示都是一维的, 且 $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \dfrac{\mathbf{R}^n}{\mathbf{Z}^n}$, 有

$$\rho(x_1, \cdots, x_n) = e^{2\pi\sqrt{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i}, \quad k_1, \cdots, k_n \in \mathbf{Z}.$$

4.4 $L_0^2(G_0)$ 的积分运算

若 (ρ, V) 为实连通紧李群 G_0 的复表示, 则 $\chi_\rho \in L_0^2(G_0)$. 又 G_0 的任一元素都与 G_0 的一个固定的 Cartan 子群中的元素共轭. 因此类函数实际上就是 Cartan 子群上的函数. 我们的目的是把类函数的积分变成在 Cartan 子群上的积分.

引理 4.4.1 设 H_0 是 G_0 的一个 Cartan 子群. 则 $(G_0/H_0) \times H_0$ 到 G_0 的映射: $\psi(gH_0, h) = ghg^{-1}$ $(\forall g \in G_0,\ h \in H_0)$ 是单值满解析映射, 且对 $f \in L_0^2(G)$, 有 $f^\psi(gH_0, h) = f(\psi(gH_0, h)) = f(h)$.

证 因为 H_0 为 G_0 的 Cartan 子群, 故有 $\bigcup\limits_{g \in G_0} gH_0g^{-1} = G_0$, $(gh_1)h(gh_1)^{-1} = ghg^{-1}$, $\forall h_1 \in H_0$. 因而 ψ 是 $(G_0/H_0) \times H_0$ 到 G_0 的单值满映射. 又在李群中乘法及逆运算均解析, 故 ψ 是解析的.

最后, 由于 $f \in L_0^2(G_0)$, 有 $f(\mathrm{ad}g(h)) = f(h)$, 故 $f(\psi(gH_0, h)) = f(ghg^{-1}) = f(h)$. □

引理 4.4.2 设 g_0 是 G_0 中正则元素, 又 $g_1 \in G_0, h_1 \in H_0$, 使得 $g_0 = g_1h_1g_1^{-1}$, 则有

1) $\psi^{-1}(g_0) = \{(g_1aH_0, a^{-1}h_1a) | a \in N_{G_0}(H_0)\}$;

2) $|\psi^{-1}(g_0)| = |W_{G_0}|$, W_{G_0} 是 G_0 的 Weyl 群;

3) 有 g_0 的邻域 U, 使 ψ 是 U 的重数为 $|W_{G_0}|$ 的覆盖映射.

证 1) $g \in G_0, h \in H_0$, 而 $ghg^{-1} = g_1h_1g_1^{-1} = g_0$, 当且仅当 $g_1^{-1}ghg^{-1}g_1 = h_1$. 记 $g_1^{-1}g = a$. 于是有 $aha^{-1} = h_1$. 故 $aC_{G_0}(h)^0a^{-1} = C_{G_0}(h_1)^0$. 由 g_0 正则, 故

h_1, h 均正则, 因而有 $C_{G_0}(h)^0 = C_{G_0}(h_1)^0 = H_0$, 即有 $a \in N_{G_0}(H_0)$. 于是 $g = g_1 a$, $h = a^{-1}h_1 a$. 反之, $ghg^{-1} = g_1 a(a^{-1}h_1 a)(g_1 a)^{-1} = g_0$, 故 1) 成立.

2) $(g_1 aH_0, a^{-1}h_1 a) = (g_1 bH_0, b^{-1}h_1 b)$ 当且仅当 $g_1 aH_0 = g_1 bH_0$, $a^{-1}h_1 a = b^{-1}h_1 b$. 即有 $a \in bH_0$, 因而 $|\psi^{-1}(g_0)| = |N_{G_0}(H_0)/H_0|$. 注意到 $C(G_0) \subset H_0$. 而 $W_{G_0} \cong \dfrac{\mathrm{Ad}N_{G_0}(H_0)}{\mathrm{Ad}H_0} \cong \dfrac{N_{G_0}(H_0)}{H_0}$, 因此 2) 成立.

3) 由 $\dim((G_0/H_0) \times H_0) = \dim G_0$, g_0 正则, $\psi^{-1}(g_0)$ 离散, 知 ψ 在 g_0 处局部同胚. 于是由 2) 知 3) 成立. □

引理 4.4.3 设 $f \in L_0^2(G_0)$, 以 $\dot{G}_0$, $\dfrac{\dot{G}_0}{H_0}$, $\dot{H}_0$ 分别表示 G_0, G_0/H_0, H_0 上的体积元. ψ^* 表示由 ψ 诱导的 G_0 的微分形式到 $(G_0/H_0) \times H_0$ 的微分形式的映射. 则有 $\displaystyle\int_{G_0} f(g)\dot{G}_0 = \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{(G_0/H_0)\times H_0} f(h)\psi^*\dot{G}_0$.

证 以 G_r 表示 G_0 中正则元素集. 则 $G_0 \backslash G_r$ 是 G_0 的闭集, 且 $\dim(G_0 \backslash G_r) \leqslant \dim G_0 - 3$. 于是有 $\displaystyle\int_{G_0} f(g)dg = \int_{G_r} f(g)dg$, $\displaystyle\int_{(G_0/H_0)\times H_0} f(gH_0, h)\frac{\dot{G}_0}{H_0} \times \dot{H}_0 = \int_{\psi^{-1}(G_r)} f(gH_0, h)\frac{\dot{G}_0}{H_0} \times \dot{H}_0$. 由引理 4.4.2, 对 $f \in L_0^2(G_0)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{G_0} f(g)\dot{G}_0 &= \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{(G_0/H_0)\times H_0} f(\psi(gH_0, h))\psi^*\dot{G}_0 \\ &= \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{(G_0/H_0)\times H_0} f(h)\psi^*\dot{G}_0.\end{aligned}$$

□

为计算 $\psi^*\dot{G}_0$, 进一步分析 ψ. 以 π 表示 G_0 到 G_0/H_0 的自然映射, 即 $\pi(g) = gH_0$. 以 φ 表示 $G_0 \times H_0$ 到 G_0 上的映射 $\varphi(g, h) = \mathrm{ad}g(h)$. 再令 $\eta = \pi \times \mathrm{id}$ 为 $G_0 \times H_0$ 到 H_0 上的映射, 即 $\eta(g, h) = (gH_0, h)$. 于是有

$$\begin{aligned}\varphi &= \psi\eta, \\ d\varphi &= d\psi \cdot d\eta, \\ d\eta &= d\pi \times \mathrm{id}.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} G_0 \times H_0 & \stackrel{\eta}{\longrightarrow} & (G_0/H_0) \times H_0 \\ \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\ & G_0 & \end{array}$$

由引理 3.6.3 的证明知, 在 (g, h) 处 $d\varphi(x, x_0) = (\mathrm{Ad}g)[(\mathrm{Ad}h^{-1})x - x + x_0]_h$, 其中 $x \in \mathfrak{g}_0$, $x_0 \in \mathfrak{h}_0$. 于是在 (gH_0, h) 处有 $d\psi(d\pi(x), x_0) = (\mathrm{Ad}g)[(\mathrm{Ad}h^{-1})x - x - x_0]_h$. 需要计算 ψ^* 的 Jacobi, 即 $\det(\psi^*(h)) = \Delta(h)$.

引理 4.4.4 局部解析同胚 ψ 的 Jacobi 为 $\Delta(\exp x) = \prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} |e^{(\frac{\alpha}{2}, x)} - e^{(-\frac{\alpha}{2}, x)}|^2$, $x \in \mathfrak{h}_0$.

证 因 $\mathrm{Ad}g$ 相似于正交矩阵, 故 $\det \mathrm{Ad}g = 1$. 所以只要计算 $(\mathrm{Ad}h^{-1}-\mathrm{id})_{\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0}\cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_0}$ 的行列式即可. 当然, 可视 $(\mathrm{Ad}h^{-1}-\mathrm{id})$ 为 $(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0)^C$ 上的变换. 取 $h=\exp x$, 而 $(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}_0)^C$ 有基 $\{e_\alpha\}$. 又

$$(\mathrm{Ad}(\exp(-x))-\mathrm{id})e_\alpha = (e^{-(\alpha,x)}-1)e_\alpha.$$

故有

$$\begin{aligned}\Delta(\exp x) &= \prod_{\alpha\in\Delta}(e^{-(\alpha,x)}-1) = \prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{-(\alpha,x)}-1)(e^{(\alpha,x)}-1)\\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+} e^{(-\frac{\alpha}{2},x)}(e^{(-\frac{\alpha}{2},x)}-e^{(\frac{1}{2}\alpha,x)})e^{(\frac{\alpha}{2},x)}(e^{(\frac{\alpha}{2},x)}-e^{(-\frac{\alpha}{2},x)})\\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+}|e^{(\frac{\alpha}{2},x)}-e^{(-\frac{\alpha}{2},x)}|^2.\end{aligned}$$

□

定理 4.4.1 若 $f\in L_0^2(G_0)$, 则 $\displaystyle\int_{G_0} f(g)\dot{G}_0 = \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{\dot{H}_0} f(h)\Delta(h)\dot{H}_0$.

证 由 $\displaystyle\int_{G_0} f(g)\dot{G}_0 = \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{H_0}\int_{G_0/H_0} f(h)\psi^*\dot{G}_0$, 及 ψ^* 之 Jacobi 为 $\Delta(h)$, 对 G_0/H_0 上标准测度又有 $\displaystyle\int_{G_0/H_0}\frac{\dot{G}_0}{H_0}=1$, 故有 $\psi^* G_0 = \Delta(h)\cdot\dfrac{\dot{G}_0}{H_0}\cdot H_0$, 于是定理成立. □

推论 $\displaystyle\int_{H_0}\Delta(h)dh = |W_{G_0}|$.

事实上, 只要取 $f=1$, 立即可得上面结果. □

4.5 特征公式

设 H_0 是实连通紧半单李群 G_0 的 Cartan 子群, 其李代数分别为 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^c$, 对 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^C$ 分解的根系、素根系、Weyl 群分别为 Δ, Π, W_{G_0}. $w\in W_{G_0}$ 是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上正交变换, 也可看成是 $\mathfrak{h}_0$ 上的正交变换.设 Λ 为 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中所有整向量的集合, 即 $\Lambda=\left\{\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0 \,\middle|\, \dfrac{2(\mu,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\in\mathbf{Z},\ \forall\alpha_i\in\Pi\right\}$. 又设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 为基本强整向量, 即 $\dfrac{2(\lambda_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\delta_{ij}$. 则 $\Lambda=\left\{\sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \,\middle|\, m_i\in\mathbf{Z}\right\}$. 又 $\forall w\in W_{G_0}$, 有 $w\Lambda=\Lambda$.

引理 4.5.1 设 $\hat{\Gamma}_0=\{x_0\in\mathfrak{h}_0|(\mu,x_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}),\mu\in\Lambda\}$, 则 $\hat{\Gamma}_0 = \left\{\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{4\pi n_i\sqrt{-1}}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i \,\middle|\, n_i\in\mathbf{Z}\right\}$, $\Lambda=\{\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0|(\mu,x_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}),\forall x_0\in\hat{\Gamma}_0\}$.

证　若 $\mu\in\Lambda$, 则 $\mu=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\lambda_i$, $m_i\in\mathbf{Z}$. 因而 $\forall\mu\in\Lambda$, $(x_0,\mu)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$ 当且仅当 $(x_0,\lambda_i)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})\,(1\leqslant i\leqslant l)$. 设 $x_0=\sum\limits_{i=1}^{l}k_i\alpha_i\in\hat{\Gamma}_0$. 则有 $k_i=\dfrac{2(x_0,\lambda_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$, $(x_0,\lambda_i)=2n_i\pi\sqrt{-1}$. 于是 $x_0=\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{4\pi n_i\sqrt{-1}}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$.

由于$\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 也是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 的基, 故 $\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 有 $\mu=\sum\limits_{i=1}^{l}a_i\lambda_i$, 且 $\forall x_0\in\hat{\Gamma}_0$, 有 $(\mu,x_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$. 特别地, $2\pi m_i\sqrt{-1}=\left(\mu,\dfrac{4\pi\sqrt{-1}}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\right)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$. 于是 $m_i\in\mathbf{Z}$. □

引理 4.5.2　环面 $\hat{H}_0=\mathfrak{h}_0/\hat{\Gamma}_0$ 的不可约复表示为 $\rho(x)=e^{(\mu,x)}$, $x\in\mathfrak{h}_0/\hat{\Gamma}_0$, $\mu\in\Lambda$. 因而 $\displaystyle\int_{\hat{H}_0}e^{(\mu,x)}\overline{e^{(\mu',x)}}\dot{\hat{H}}_0=\begin{cases}0, & \mu\neq\mu',\\ 1, & \mu=\mu'.\end{cases}$

证　因 $\hat{H}_0$ 为 l 维环面, 故不可约表示为 $\rho(x)=e^{2\pi\sqrt{-1}\sum\limits_{i=1}^{l}k_ix_i}$, 其中 x_i 为 x 的分量. 于是有 $\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 使 $\rho(x)=e^{(\mu,x)}$, 且 μ 满足 $\forall x\in\hat{\Gamma}_0$, $(\mu,x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$, 故 $\mu\in\Lambda$.

反之, 若 $\mu\in\Lambda$, 则 $\rho(x)=e^{(\mu,x)}$ 是 $\hat{H}_0$ 的表示. 故引理成立. □

定义 4.5.1　$\mathfrak{h}_0$ 上函数 $f(x)$ 若满足 $\forall w\in W_{G_0}$, $f(w(x))=f(x)$, 则称为**对称函数**; 若满足 $f(w(x))=\mathrm{sign}\,w f(x)$, 则称为**反对称函数**.

引理 4.5.3　设 $\beta\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 记 $f_\beta(x)=\sum\limits_{w\in W_{G_0}}\mathrm{sign}w\,e^{(w(\beta),x)}$ $(x\in\mathfrak{h}_0)$. 则有

1)　$f_\beta(wx)=f_{w(\beta)}(x)=\mathrm{sign}wf_\beta(x)$;

2)　$f_\beta(\sqrt{-1}\beta')=f_{\beta'}(\sqrt{-1}\beta)$;

3)　$\beta,\beta'\in\Lambda$, 且 $\beta'\notin\{w(\beta)|w\in W_{G_0}\}$, 则 $\displaystyle\int_{\hat{H}_0}f_\beta(x)\overline{f_{\beta'}(x)}\dot{\hat{H}}_0=0$;

4)　若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$, 且 $i\neq j$ 时, $\beta_i\neq\beta_j$; 又有非零的, 互不相等的 $c_1,c_2,\cdots,c_m\in\mathbf{C}$ 使得 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}c_ie^{(\beta_i,x)}$ 为反对称函数. 则存在 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 满足 $\gamma_j>w(\gamma_j)$, $\forall w\in W_{G_0}$, $w\neq\mathrm{id}$; $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{t}d_jf_{\gamma_j}$, $d_j\in\mathbf{C}$, $1\leqslant j\leqslant m$.

而且, 当 $\beta_i\in\Lambda$ 时, $\displaystyle\int_{\hat{H}_0}f_{\gamma_i}(x)\overline{f_{\gamma_j}(x)}\dot{\hat{H}}_0=0,\quad i\neq j.$

读者可作为练习自行证明. 此引理说明 $\beta\in\Lambda$, 则 $f_\beta(x)$ 是反对称函数.

引理 4.5.4　设 $\{\lambda_i\}$ 是基本强整向量, 则 $\delta=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta+}\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\in\Lambda$, 且若

$w \in W_{G_0}$, 使得 $w(\delta)=\delta$, 则 $w=\mathrm{id}$.

证 注意到 $\alpha_i \in \Pi$, 有 $w_{\alpha_i}(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$, $w_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$, 于是 $\delta - \frac{2(\delta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i = -\frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}\alpha = \delta - \alpha_i$. 因而 $\frac{2(\delta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 1$, 于是 $\delta = \sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i \in \Lambda$. 又若 $w(\delta)=\delta$, 则 $\delta = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+} w(\alpha)$. 因此 $w(\Delta^+)=\Delta^+$, 故 $w=\mathrm{id}$. □

引理 4.5.5 设 $\delta = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$, $x\in\mathfrak{h}_0$. 则 $f_\delta(x) = \prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}(e^{(\frac{\alpha}{2},x)} - e^{-(\frac{\alpha}{2},x)})$.

证 将上式的右边记为 $\theta(x)$. 对 $\alpha_i\in\Pi$, 有

$$\begin{aligned}
\theta(w_{\alpha_i}x) &= \prod_{\alpha\in\Delta^+}(e^{(\frac{\alpha}{2},w_{\alpha_i}x)} - e^{-(\frac{\alpha}{2},w_{\alpha_i}x)})\\
&= \prod_{\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(e^{(w_{\alpha_i}(\frac{\alpha}{2}),x)} - e^{(-w_{\alpha_i}(\frac{\alpha}{2}),x)})\cdot(e^{(w_{\alpha_i}(\frac{\alpha_i}{2}),x)} - e^{(-w_{\alpha_i}(\frac{\alpha_i}{2}),x)})\\
&= \prod_{\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(e^{(\frac{\alpha}{2},x)} - e^{(-\frac{\alpha}{2},x)})(e^{(-\frac{\alpha_i}{2},x)} - e^{(\frac{\alpha_i}{2},x)})\\
&= -\prod_{\Delta^+}(e^{(\frac{\alpha}{2},x)} - e^{(-\frac{\alpha}{2},x)}) = \mathrm{sign}w_{\alpha_i}\theta(x).
\end{aligned}$$

故 $\theta(x)$ 是反对称的. 再将 $\theta(x)$ 的乘积展开, 有 $\theta(x) = \sum\limits_{\mu}\pm e^{(\mu,x)}$, 其中 $\mu = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}c_\alpha\alpha$, $c_\alpha=\pm1$. 显然 $\delta\in\{\mu\}$, 且 $\delta\neq\mu$ 时, $\delta>\mu$. $e^{(\delta,x)}$ 在 $\theta(x)$ 中系数为 $c_\delta=1$. 由引理 4.5.3, 有 $\theta(x) = f_\delta(x) + c_{\delta_2}f_{\delta_2}(x) + \cdots + c_{\delta_t}f_{\delta_t}$, 且 $\delta_2,\cdots,\delta_t\in\Lambda$.

又由引理 4.5.4 知 $w(\delta)=w'(\delta)$, 当且仅当 $w=w'$. 因而 $f_\delta(x)$ 有 $|W_{G_0}|$ 项, 故 $\int_{\hat{H}_0} f_\delta(x)\overline{f_\delta(x)}\dot{\hat{H}}_0 = |W_{G_0}|$. 又由引理 4.4.4 知, $\theta(x)\overline{\theta(x)} = \Delta(\exp x)$. 由定理 4.4.1 的推论有

$$|W_{G_0}| = \int_{\hat{H}_0}\theta(x)\overline{\theta(x)}\dot{\hat{H}}_0 = \int_{\hat{H}_0} f_\delta(x)\overline{f_\delta(x)}\dot{\hat{H}}_0 + \sum_{i=2}^{t}\int_{\hat{H}_0}|c_{\delta_i}|^2 f_{\delta_i}(x)\overline{f_{\delta_i}(x)}\dot{\hat{H}}_0.$$

因而 $c_{\delta_i}f_{\delta_i}(x)=0$, $2\leqslant i\leqslant t$. 故 $f_\delta(x)=\theta(x)$. □

设 $(\hat{G}_0,f)$, $\mathrm{Ad}G_0$ 分别是 G_0 的通用覆盖群、伴随群. 于是有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{G}_0 & \xrightarrow{f} & G_0 & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Ad}G_0\\
\hat{\exp}\uparrow & & \uparrow\exp & & \uparrow\exp\\
\mathfrak{g}_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathfrak{g}_0 & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{ad}\mathfrak{g}_0
\end{array}$$

H_0 为 G_0 的 Cartan 子群, 则 $\hat{H}_0 = f^{-1}(H_0)^0$, Ad$H_0$ 分别为 $\hat{G}_0$, AdG_0 的 Cartan 子群. 且有如下交换图.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}_0 & \xrightarrow{f} & H_0 & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Ad}H_0 \\ \hat{\exp}\uparrow & & \uparrow\exp & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{h}_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathfrak{h}_0 & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{ad}\mathfrak{h}_0 \end{array}$$

$(\mathfrak{h}_0, \hat{\exp}), (\mathfrak{h}_0, \exp), (\mathrm{ad}\mathfrak{h}_0, \exp)$ 分别为 $\hat{H}_0$, H_0, AdH_0 的通用覆盖群. 令 $\hat{\Gamma}_0$, Γ_0 分别为 $\hat{H}_0, H_0$ 的 Poincaré 群. $\tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \mathfrak{h}_0 | \mathrm{Ad}\exp x = \mathrm{Ad}e\}$, 与后者的 Poincaré 群同构. 则有 $\hat{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0 \subset \tilde{\Gamma}_0$. 可以证明 $\hat{\Gamma}_0$ 即为引理 4.5.1 所述的 $\hat{\Gamma}_0$. 而 $\tilde{\Gamma}_0 = \bigcap_{\alpha\in\Delta}\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{h}_\alpha^k = \{x \in \mathfrak{h}_0 | (\alpha, x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}), \forall\alpha \in \Delta\}$.

此外 G_0 的不可约表示 (ρ, V) 必然诱导出 $\hat{G}_0$ 的一个不可约表示 $(\rho f, V)$, 而且相应 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 $(d\rho, V) = (d(\rho f), V)$. 因而 G_0 的不可约表示特征的计算变为 $\hat{G}_0$ 的不可约表示特征的计算.

设 χ_ρ 是 G_0 的不可约复表示 (ρ, V) 的特征, $\chi_\rho \in L_0^2(G_0)$, 又 $(d\rho, V) = (\rho, V)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示, 权系为 Φ, 最高权为 λ. 又有 $V = \sum\limits_{\mu\in\Phi} V_\mu$. 于是对 $x \in \mathfrak{h}_0$, 有 $d\rho(x) = \mathrm{diag}(\cdots, (\mu, x), \cdots)$, $\rho(\exp x) = \mathrm{diag}(\cdots, e^{(\mu,x)}, \cdots)$. 于是 $\chi_\rho(\exp x) = \sum\limits_{\mu\in\Phi} \dim V_\mu e^{(\mu,x)}$.

引理 4.5.6 设 $w \in W_{G_0}$, 则 $\dim V_{w(\mu)} = \dim V_\mu$; $\chi_\rho(\exp x)$ 是对称函数, 即 $\chi_\rho(\exp w(x)) = \chi_\rho(\exp x)$.

证 设 $\alpha \in \Delta$, 有 $g_\alpha \in N_{G_0}(H_0)$ 使得 $g_\alpha \exp x g_\alpha^{-1} = \exp w_\alpha(x)$, 于是 $\forall x_0 \in \mathfrak{h}_0$, $\rho(g_\alpha)d\rho(x) = d\rho(w_\alpha(x))\rho(g_\alpha)$. 进而

$$d\rho(w_\alpha(x))\rho(g_\alpha)v = \rho(g_\alpha)d\rho(x)v = (\mu, x)\rho(g_\alpha)v = (w_\alpha(\mu), w_\alpha(x))\rho(g_\alpha)v, \quad v \in V_\mu.$$

故 $\rho(g_\alpha)v \in V_{w_\alpha(\mu)}$. 因 $\rho(g_\alpha)$ 为同构, 故 $\rho(g_\alpha)V_\mu = V_{w_\alpha(\mu)}$. 因此 $w \in W_{G_0}$, $\dim V_\mu = \dim V_{w(\mu)}$. 于是

$$\chi_\rho(\exp w(x)) = \sum_{\mu\in\Phi} \dim V_\mu e^{(\mu, w(x))} = \sum_{w^{-1}(\mu)\in\Phi} \dim V_{w^{-1}(\mu)} e^{(w^{-1}(\mu), x)} = \chi_\rho(\exp x).$$

□

引理 4.5.7 设 λ 是不可约复表示 $(d\rho, V)$ 的最高权, 则 $w \in W_{G_0} \setminus \{\mathrm{id}\}$ 时, $w(\delta + \lambda) < \delta + \lambda$, $|\{w(\delta + \lambda) | w \in W_{G_0}\}| = |W_{G_0}|$.

证 设 $w \in W_{G_0}$, $w \neq \mathrm{id}$. 于是 $w(\delta) < \delta$. 又因为 λ 为最高权, $w(\lambda) \in \Phi$, 故 $w(\delta + \lambda) < \delta + \lambda$. 由此可知, $w \neq w'$ 时, $w(\delta + \lambda) \neq w'(\delta + \lambda)$. 故引理成立. □

定理 4.5.1 设 (ρ, V) 是实连通紧李群 G_0 的不可约复表示, χ_ρ 是特征, $(d\rho, V)$

为相应的 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示, Φ 为权系, λ 为最高权. 则有

$$\textbf{特征公式}: \ \chi_\rho(\exp x)=\frac{f_{\delta+\lambda}(x)}{f_\delta(x)};\quad \textbf{维数公式}: \ \dim V=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\delta+\lambda,\alpha)}{(\delta,\alpha)}.$$

证 因 $\chi_\rho(\exp x)$, $f_\delta(x)$ 分别是对称、反对称的, 故 $\theta_0(x)=\chi_\rho(\exp x)f_\delta(x)$ 是反对称的. 又因为 $\theta_0(x)$ 的展开式所含的项为 $e^{(\mu+\beta,x)}$, 这里 $\mu\in\Phi\subset\Lambda,\beta=w(\delta)\in\Lambda$, $w\in W_{G_0}$. 故 $\mu+\beta\in\Lambda$. 由 $\dim V_\lambda=1$, $f_\delta(x)$ 中 $e^{(\delta,x)}$ 的系数为 1, 故有 $\theta_0(x)=f_{\delta+\lambda}(x)+\sum\limits_\beta c_\beta f_\beta(x)$, 其中 $\beta\notin\{w(\delta+\lambda)|w\in W_{G_0}\}$. 由引理 4.5.2 和引理 4.5.7, 有 $\int_{\hat{H}_0}f_{\delta+\lambda}(x)\overline{f_{\delta+\lambda}(x)}\dot{\hat{H}}_0=|W_{G_0}|$. 于是 $\int_{H_0}\theta_0(x)\overline{\theta_0(x)}\dot{H}_0=|W_{G_0}|+\sum\limits_\beta\int_{H_0}|c_\beta|^2|f_\beta(x)|^2\dot{H}_0$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_{H_0}|\theta_0(x)|^2\dot{H}_0&=\int_{H_0}|\chi_\rho(\exp x)|^2|f_\delta(x)|^2\dot{H}_0\\&=\int_{H_0}|\chi_\rho(\exp x)|^2\Delta(\exp x)\dot{H}_0=|W_{G_0}|\int_{G_0}|\chi_\rho(g)|^2dg=|W_{G_0}|.\end{aligned}$$

于是 $c_\beta f_\beta(x)=0$. 因而 $\theta_0(x)=f_{\delta+\lambda}(x)$. 所以特征公式成立.

取 $x=-\sqrt{-1}\delta$, 则由引理 4.5.3 有

$$\begin{aligned}\dim V=\chi_\rho(e)=\lim_{t\to0}\chi_\rho(\exp tx)&=\lim_{t\to0}\frac{f_{\delta+\lambda}(t(-\sqrt{-1}\delta))}{f_\delta(t(-\sqrt{-1}\delta))}\\&=\lim_{t\to0}\frac{f_\delta(t(-\sqrt{-1}(\delta+\lambda)))}{f_\delta(t(-\sqrt{-1}\delta))}.\end{aligned}\tag{1}$$

注意到 $e^{(\frac{\alpha}{2},tx)}-e^{(-\frac{\alpha}{2},tx)}=\left(1+\left(\frac{\alpha}{2},x\right)t+\cdots\right)-\left(1-\left(\frac{\alpha}{2},x\right)t+\cdots\right)=(\alpha,x_0)t+\cdots$, 于是在下面等式 $f_\delta(tx)=\left(\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha,x)\right)t^{|\Delta^+|}+\cdots$ 中将 x 分别换为 $-\sqrt{-1}t(\delta+\lambda)$, $-\sqrt{-1}t\delta$ 并代入 (1) 中就得到维数公式. □

给定一个强整向量 λ, 在什么条件下 $\dfrac{f_{\lambda+\beta}(x)}{f_\beta(x)}$ 是 G_0 的一个不可约复表示的特征?

回忆 $\tilde{\Gamma}_0=\{x\in\mathfrak{h}_0|\mathrm{Ad}\exp x=\mathrm{Ad}e=\mathrm{id}\}=\{x\in\mathfrak{h}_0|(\alpha,x)\equiv0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}),\alpha_i\in\Delta\}=\{x\in\mathfrak{h}_0|(\alpha_i,x)\equiv0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}),\alpha_i\in\Pi\}$. 自然有 $\Gamma_0\subseteq\tilde{\Gamma}_0$.

引理 4.5.8 令 $\Gamma_0=\{x\in\mathfrak{h}_0|\exp x=e\}$. Λ 为整向量集. 令 $\Lambda_0=\{\mu\in\Lambda|(\mu,x)\equiv0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}),\forall x\in\Gamma_0\}$. 则 $\forall w\in W_{G_0}$, 有 $w(\Gamma_0)=\Gamma_0$, $w(\Lambda_0)=\Lambda_0$, $\Delta\subset\Lambda_0$.

证 设 $\alpha \in \Delta$, $x \in \Gamma_0$, 于是 $\exp x = e$, 又有 $g_\alpha \in N_{G_0}(H_0)$, 使得 $\mathrm{Ad}g_\alpha(x) = w_\alpha(x)$, 因此 $\exp w_\alpha = \exp \mathrm{Ad}g_\alpha(x) = \mathrm{ad}g_\alpha(\exp x) = e$. 又 $\{w_\alpha\}$ 生成 W_{G_0}, 故 $\forall w \in W_{G_0}$, $w(\Gamma_0) = \Gamma_0$.

设 $\mu \in \Lambda_0$, $x \in \Gamma_0$, $w \in W_{G_0}$, 则 $(w(\mu), x) = (\mu, w^{-1}(x)) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$. 于是 $w(\Lambda_0) = \Lambda_0$.

又 $\alpha \in \Delta$, $x \in \Gamma_0 \subset \tilde{\Gamma}_0$, 于是 $(\alpha, x) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$, 故 $\Delta \subset \Lambda_0$. □

定理 4.5.2 对于强整向量 λ, 有 G_0 的不可约复表示 (ρ, V) 使 $(d\rho, V)$ 的最高权为 λ 的充分必要条件是 $\lambda \in \Lambda_0$.

证 设 λ 是 $(d\rho, V)$ 的最高权. 故有 $v \in V_\lambda$, $x \in \mathfrak{h}_0$, 使 $d\rho(x)v = (\lambda, x)v$, $\rho(\exp x)v = e^{(\lambda,x)}v$. 特别, $x \in \Gamma_0$, $\exp x = e$, 于是 $\rho(\exp x) = \mathrm{id}_V$, 故 $(\lambda, x) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$, 即 $\lambda \in \Lambda_0$.

反之, $\lambda \in \Lambda_0$, $w \in W_{G_0}$, 有 $w(\lambda), w(\delta) - \delta \in \Lambda_0$. $\forall x \in \mathfrak{h}_0$, $x_0 \in \Gamma_0$, 有 $(w(\lambda+\delta), x_0 + x) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1})$. 因而 $\dfrac{f_{\delta+\lambda}(x_0+x)}{f_\delta(x_0+x)} = \dfrac{e^{(\delta,x_0)}f_{\delta+\lambda}(x)}{e^{(\delta,x_0)}f_\delta(x)} = \dfrac{f_{\delta+\lambda}(x)}{f_\delta(x)}$. 于是 $F(\exp x) = \dfrac{f_{\delta+\lambda}(x)}{f_\delta(x)}$ 是 $\mathfrak{h}_0/\Gamma_0 = H_0$ 上的函数. 又 $\forall g \in G_0$, 有 $g_1 \in G_0$, $h \in H_0$ 使得 $\mathrm{ad}g_1(h) = g$. 在 G_0 上定义

$$\chi(g) = \chi(\mathrm{ad}g_1(h)) = F(h).$$

首先证明 $\chi(g)$ 是单值的. 即若 $g = g_1^{-1}hg_1 = g_2^{-1}h'g_2$, 则 $F(h) = F(h')$. 由 G_0 中正则元稠密, 故只要在正则元上证明即可. h 正则, h' 亦正则, 且 $g_2g_1^{-1}hg_1g_2^{-1} = h'$. 于是 $a = g_2g_1^{-1} \in N_{G_0}(H_0)$. 设 $h = \exp x$, $h' = \exp x'$ $(x, x' \in \mathfrak{h}_0)$, 则 $\exp x' = a\exp xa^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}a)(x)$. 故 $F(h') = \dfrac{f_{\lambda+\delta}(w(x))}{f_\delta(w(x))} = \dfrac{f_{\lambda+\delta}(x_0)}{f_\delta(x_0)} = F(h)$. 由此立即可知 $\chi(g)$ 是单值.

再由 $\chi(\mathrm{ad}g_2(g)) = \chi(\mathrm{ad}g_2\mathrm{ad}g_1^{-1}(h)) = F(h) = \chi(g)$, 知 $\chi(g) \in L_0^2(G_0)$.

由于 $\{\chi_\rho(g) | \rho \in \mathrm{Irr}(G_0, \mathbf{C})\}$ 为 $L_0^2(G_0)$ 的标准正交基, 故有 $\chi(g) = \sum\limits_{\rho\in\mathrm{Irr}(G_0,\mathbf{C})} a_\rho\chi_\rho(g)$, 其中 $a_\rho = \displaystyle\int_{G_0} \chi(g)\overline{\chi_\rho(g)}\dot{G}_0$. 设 ρ 之最高权为 λ_ρ, 则有

$$a_\rho = \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{H_0} \frac{f_{\delta+\lambda}(x)}{f_\delta(x)}\frac{\overline{f_{\delta+\lambda_\rho}(x)}}{\overline{f_\delta(x)}}|\theta(x)|^2\dot{H}_0 = \frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{H_0} f_{\delta+\lambda}(x)\overline{f_{\delta+\lambda_\rho}(x)}\dot{H}_0.$$

于是当 $\delta + \lambda_\rho \neq w(\delta + \lambda)$ 时, $a_\rho = 0$. 由 $\chi \neq 0$, 故有 ρ_0, 使得

$$\delta + \lambda_{\rho_0} = w(\delta + \lambda) \leqslant \delta + \lambda = w^{-1}(\delta + \lambda_{\rho_0}) \leqslant \delta + \lambda_{\rho_0},$$

因而 $\lambda = \lambda_{\rho_0}$, 即 $\chi(g) = \chi_{\rho_0}(g)$. 定理证完. □

习 题

证明引理 4.5.3.

4.6 实紧李群的实表示论

本节所讨论的实紧李群的实表示论, 它与紧李群的复表示论有密切关系.

我们知道, 若 σ 是复线性空间 $\mathcal{L}$ 的半对合, 则 $\mathcal{L}_0=\{x\in\mathcal{L}|\sigma(x)=x\}$ 是 $\mathcal{L}$ 的实形式. 设 A 是 $\mathcal{L}$ 的线性变换, 则 $\mathcal{A}|_{\mathcal{L}_0}$ 是 $\mathcal{L}_0$ 的线性变换当且仅当 $\sigma\mathcal{A}=\mathcal{A}\sigma$.

引理 4.6.1 σ 为 $\mathcal{L}$ 的半对合, $\mathcal{L}_1$ 为 $\mathcal{L}$ 的子空间, 则 $\sigma(\mathcal{L}_1)$ 也是子空间, 且 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\dot{+}\sigma(\mathcal{L}_1)$ 当且仅当有 $\mathcal{L}_0$ 的线性变换 J 使得 $J^2=-\mathrm{id}, \mathcal{L}_1=\{x-\sqrt{-1}J(x)|\forall x\in\mathcal{L}_0\}$.

证 事实上, 若 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\dot{+}\sigma(\mathcal{L}_1)$, 由 $J(x)=\sqrt{-1}x, J(\sigma(x))=-\sqrt{-1}\sigma(x)$, $\forall x\in\mathcal{L}_1$ 定义了 $\mathcal{L}$ 上的线性变换. 显然 $J^2=-\mathrm{id}$. 易证 $\sigma J=J\sigma$, 即 $J|_{\mathcal{L}_0}$ 是 $\mathcal{L}_0$ 的线性变换.

反之, $\mathcal{L}_0$ 的线性变换 J 可开拓为 $\mathcal{L}$ 的线性变换, 且 $J\sigma=\sigma J$, $J^2=-\mathrm{id}$. 于是有 $\mathcal{L}=E_{\sqrt{-1}}(J)\dot{+}E_{-\sqrt{-1}}(J)$, $E_{\pm\sqrt{-1}}(J)$ 为 J 的属于 $\pm\sqrt{-1}$ 的特征子空间, 且 $\sigma(E_{\pm\sqrt{-1}}(J))=E_{\mp\sqrt{-1}}(J)$. 设 $x,y\in\mathcal{L}_0$, 则 $x+\sqrt{-1}y\in E_{\sqrt{-1}}(J)$ 当且仅当 $y=-J(x)$. 因此引理成立. □

(ρ_0,V_0) 是紧实连通李群 G_0 的实表示. $V=V_0^C$, 于是 $\rho_0(g)$ 可自然地开拓到 V 上. 于是得到 G_0 的一个复表示 (ρ,V). 如果 V_0 相应的半对合为 σ, 则 $\forall g\in G_0$, $\rho(g)\sigma=\sigma\rho(g)$. 这时我们称 (ρ,V) 是 (ρ_0,V_0) 的**复化**.

引理 4.6.2 设 (ρ,V) 是 G_0 的一个复表示. 又因为 V 有实形式 V_0, 对应的半对合为 σ, 则 (ρ,V) 是 G_0 的实表示 (ρ_0,V_0) 的复化, 当且仅当 $\rho_0(g)=\rho(g)$, $\rho(g)\cdot\sigma=\sigma\cdot\rho(g)$, $\forall g\in G_0$.

证 必要性如上所述, 若 $\rho(g)\sigma=\sigma\cdot\rho(g)$, 则有 $\rho(g)|_{V_0}\in gl(V_0)$. 记 $\rho_0(g)=\rho(g)|_{V_0}$. 于是 (ρ_0,V_0) 是实表示, 其复化为 (ρ,V). □

定义 4.6.1 实连通紧李群 G_0 的不可约实表示 (ρ_0,V_0) 称为**第一类**的, 若其复化 (ρ,V) 不可约. 否则称为**第二类**.

定理 4.6.1 设 (ρ,V) 是实连通紧李群 G_0 的不可约复表示. 则下面三个条件等价:

1) (ρ,V) 是 G_0 的第一类不可约实表示 (ρ_0,V_0) 的复化;

2) 在 V 中存在 $\rho(G_0)$ 不变的非退化对称双线性函数;

3) $(d\rho,V)$ 与其对偶表示 $(d\rho^*,V^*)$ 等价, 且 $(d\rho,V)$ 的高度 $T(d\rho)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 即 $(d\rho,V)$ 为偶型表示.

证　由 5.1 小节的定理 5.1.1 及定理 5.1.4 知 2) 与 3) 是等价的. 故只要证 1) 与 2) 等价即可.

1) $\Longrightarrow$ 2)　因为 (ρ, V) 是 (ρ_0, V_0) 的复化. 设对应 V_0 的 V 的半对合为 σ, 则有 $\rho(g)\sigma = \sigma\rho(g)$. V_0 有 $\rho_0(G_0)$ 的不变内积 (x_0, y_0), 则 V 上由

$$\begin{aligned}&(x_0 + \sqrt{-1}y_0, x_1 + \sqrt{-1}y_1)\\ =& (x_0, x_1) - (y_0, y_1) + \sqrt{-1}((x_0, y_1) + (y_0, x_1))\end{aligned}$$

定义了对称不变双线性函数, 且非退化.

2) $\Longrightarrow$ 1)　设 $S(u, v)$ 是 V 上不变非退化对称双线性函数, (u, v) 是 V 上的不变内积.

固定 v, 则有唯一的 v', 使得 $\forall u \in V$, 有 $S(u, v) = (u, v')$. 令 $\sigma'(v) = v'$. 由

$$S(u, v_1 + v_2) = (u, v_1' + v_2'),$$

$$(u, (\alpha v)') = S(u, \alpha v) = \alpha(u, v') = (u, \bar{\alpha}v'),$$

知

$$\sigma'(v_1 + v_2) = \sigma'(v_1) + \sigma'(v_2), \quad \sigma'(\alpha v) = \bar{\alpha}\sigma(v),$$

且 $\forall v' \in V$, 有唯一的 $v \in V$, 使得 $S(u, v) = (u, v')$. 故 σ' 是满映射. 再由

$$S(u, \rho(g)v) = S(\rho(g^{-1})u, v) = (\rho(g^{-1})u, v') = (u, \rho(g)v'),$$

有 $\sigma'\rho(g) = \rho(g)\sigma'$. 于是

$$\sigma'^2\rho(g) = \rho(g)\sigma'^2, \quad \forall g \in G_0.$$

而 σ'^2 是线性变换, 由 Schur 引理有 $\sigma'^2 = c\,\mathrm{id}_V$. 由此有 $\sigma' = c(\sigma')^{-1}$. 又

$$\begin{aligned}(u, v) &= (u, (\sigma'\sigma'^{-1})(v)) = S(u, \sigma'^{-1}(v))\\ &= S(u, c^{-1}\sigma'(v)) = \frac{1}{c}S(\sigma'(v), u) = \frac{1}{c}(\sigma'(v), \sigma'(u)),\end{aligned}$$

取 $v = u$, 知 $c > 0$. 故 $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sigma'$ 是半对合, 且 $\sigma\rho(g) = \rho(g)\sigma$. 令 $V_0 = \{v \in V | \sigma(v) = v\}$, 则 $V_0^C = V$, $\rho(g)V_0 = V_0$, $\rho_0(g) = \rho(g)|_{V_0}$, 故 (ρ, V) 是 (ρ_0, V_0) 的复化.

□

定理 4.6.2 设 (ρ_0, V_0) 为实连通紧李群 G_0 的不可约实表示. (ρ, V) 为其复化. σ 为 V 对应 V_0 的半对合, 则下面条件等价:

1) (ρ_0, V_0) 是第二类的;

2) V 中有极小不变子空间 V_1, 使得 $V = V_1 \dot{+} \sigma(V_1)$, 且 $\sigma(V_1)$ 亦为极小不变子空间;

3) 有 V_0 中线性变换 J, 满足: $J^2 = -\mathrm{id}_V$, $\rho(g)J = J\rho(g)$, $\forall\, g \in G_0$.

证 1) $\Longrightarrow$ 2) (ρ_0, V_0) 是第二类, 故 (ρ, V) 可约, V 有极小不变子空间 $V_1 \subsetneqq V$, $V_1 \neq \{0\}$. 又由 $\rho(g)\sigma = \sigma\rho(g)$, $\forall g \in G_0$, 于是

$$\rho(g)\sigma V_1 = \sigma\rho(g)V_1 = \sigma V_1.$$

从而 σV_1 亦为不变子空间. 若 σV_1 非极小, 则 $\{0\} \neq V_2 \subsetneqq \sigma V_1$. 于是 $\sigma V_2 \subsetneqq V_1$, 而 σV_2 亦不变, 与 V_1 的极小性矛盾. 故 σV_1 极小. 显然 $V_1 \cap \sigma V_1$ 为不变子空间. 若 $V_1 \cap \sigma V_1 \neq \{0\}$, 由 V_1 与 σV_1 的极小性, 有

$$V_1 = \sigma V_1 = V_1 \cap \sigma V_1.$$

此时 $(V_1 \cap V_0)^C = V_1$, 且 $\rho(g)(V_1 \cap V_0) \subset V_1 \cap V_0$. 于是 $V_1 \cap V_0$ 是 V_0 的不变子空间. 由 $V_1 \neq V$, 则 $V_1 \cap V_0 \neq V_0$, 这与 (ρ_0, V_0) 不可约矛盾. 故 $V_1 \cap \sigma(V_1) = \{0\}$.

又 $\{0\} \neq V_1 + \sigma V_1$, 而 $\sigma(V_1 + \sigma V_1) = V_1 + \sigma V_1$, 于是 $V_0 \cap (V_1 + \sigma V_1)$ 是 V_0 的子空间, 且 $(V_0 \cap (V_1 + \sigma V_1))^C = V_1 + \sigma V_1 \neq \{0\}$. 显然, $V_0 \cap (V_1 + \sigma V_1)$ 是不变子空间. 由 (ρ_0, V_0) 不可约, 于是有 $V_0 \cap (V_1 + \sigma V_1) = V_0$. 因而 $V_0 = V_1 \dot{+} \sigma V_1$.

2) $\Rightarrow$ 3) 由引理 4.6.1, 有 V 上线性变换 J 满足:

$$J^2 = -\mathrm{id}_V, \quad V_1 = E_{-\sqrt{-1}}(J), \quad \sigma V_1 = E_{\sqrt{-1}}(J).$$

设 $v \in V_1$, $g \in G_0$, 则

$$J\rho(g)v = -\sqrt{-1}\rho(g)v = \rho(g)Jv,$$
$$J\rho(g)\sigma(v) = \sqrt{-1}\rho(g)\sigma(v) = \rho(g)J\sigma(v).$$

因而 $J\rho(g) = \rho(g)J$, $\forall g \in G_0$.

3) $\Longrightarrow$ 1) 若 $J^2 = -\mathrm{id}_V$, 且与 $\rho(g)$ 可变换, 则由引理 4.6.1, 有 $V = V_1 \dot{+} \sigma V_1$. $V_1, \sigma V_1$ 分别为 J 的属于特征根 $-\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$ 的特征子空间. 又 J 与 $\rho(g)$ 可换, 故 $V_1, \sigma V_1$ 在 $\rho(g)$ 下不变. 因而 $V_1, \sigma V_1$ 均为不变子空间, 即 (ρ, V) 可约, 故 (ρ_0, V_0) 是第二类不可约实表示. □

推论 记 $(\rho_1, V_1) = (\rho|_{V_1}, V_1)$, $(\rho_2, \sigma V_1) = (\rho|_{\sigma V_1}, \sigma V_1)$, 则 $(d\rho_2, \sigma V_1)$ 与 $(d\rho_1, V_1)$ 的对偶表示等价.

证 设 $v_1, \cdots, v_m$ 是 V_1 的基. 仍以 $\rho_1(g)$ 表示 $\rho_1(g)$ 在此基下的矩阵. 则 $\sigma(v_1), \cdots, \sigma(v_m)$ 是 $\sigma(V_1)$ 的基. 由 $\sigma\rho(g) = \rho(g)\sigma$, 故 $\forall v \in V_1$,

$$\rho_2(g)\sigma v = \sigma\rho_1(g)v = \overline{\rho_1(g)}\sigma v.$$

因而 $\rho_2(g)$ 的矩阵是 $\rho_1(g)$ 的共轭, 于是 $d\rho_2(g)$ 的矩阵是 $d\rho_1(g)$ 的共轭. 注意 $d\rho_1(g)$ 的特征根是纯虚数, 于是 $(d\rho_1, V_1)$ 的权系为 Φ, 则 $(d\rho_2, \sigma V_1)$ 的权系为 $-\Phi$. 因而推论成立. □

用定理 4.2.1 证明下面的引理.

引理 4.6.3 设 (ρ_1^*, V_1^*) 是实连通紧李群 G_0 的复表示 (ρ_1, V_1) 的对偶表示. 则有 G_0 的实表示 (ρ_0, V_0) 其复化为 $(\rho, V) = (\rho_1 \dotplus \rho_1^*, V_1 \dotplus V_1^*)$.

证 设 (u, v) 是 V_1 上的不变内积. 设 $v \in V_1$, 于是有 $f_v \in V_1^*$, 使得 $f_v(u) = (u, v)$. $\tau(v) = f_v$ 是 V_1 到 V_1^* 上的一一对应, 且 $\forall v_1, v_2, v \in V$, $\alpha \in \mathbf{C}$, 有

$$\tau(v_1 + v_2) = \tau(v_1) + \tau(v_2), \quad \tau(\alpha, v) = \bar{\alpha}\tau(v).$$

又设 $u, v \in V_1$, $g \in G_0$, 则 $(\rho_1^*(g)\tau(v))(u) = (\rho_1(g^{-1})u, v) = (u, \rho_1(g)v) = (\tau\rho_1(g)v)(u)$. 故 $\rho_1^*(g)\tau = \tau\rho_1(g)$. 作 $V \dotplus V^*$ 到 $V \dotplus V^*$ 上的对应 σ:

$$\sigma(v + f) = \tau(v) + \tau^{-1}f, \quad v \in V, f \in V^*.$$

显然, σ 是半对合, 对应实形式是

$$V_0 = \{\sigma(x) = x, | x \in V\} = \{v + \tau(v) | v \in V_1\}.$$

又 $\forall v \in V_1, f \in V_1^*, g \in G_0$, 有

$$\begin{aligned} \rho(g)\sigma(v + f) &= \rho_1^*(g)\tau(v) + \rho_1(g)\tau^{-1}(f) \\ &= \tau\rho_1(v) + \tau^{-1}\rho^*(f) \\ &= \sigma(\rho_1(g)v + \rho_1^*(g)f) \\ &= \sigma\rho(g)(v + f), \end{aligned}$$

即有 $\rho(g)\sigma = \sigma\rho(g)$. $\rho_0(g) = \rho(g)|_{V_0}$ 是 V_0 的线性变换, (ρ_0, V_0) 为 G_0 的实表示, 其复化为 (ρ, V). □

定理 4.6.3 实连通紧李群 G_0 的不可约复表示 (ρ, V) 是第二类不可约实表示 (ρ_0, V_0) 的复化的不可约子表示的必要充分条件是在 V 上不存在 $\rho(G_0)$ 不变非退化对称双线性函数.

证 若 V 上不存在 $\rho(G_0)$ 不变非退化对称双线性函数. 于是由引理 4.6.2 有 G_0 的实表示 (ρ_0, V_0), 其复化为 $(\rho \dotplus \rho^*, V \dotplus V^*)$. 若 (ρ_0, V_0) 可约, 则可分解为 s 个

不可约子表示的直和 $\rho_0=\rho_{01}\dot{+}\cdots\dot{+}\rho_{0s}$, 于是其复化为 s 个子表示的直和, 但 ρ_0 之复化是两个不可约表示的直和, 故 $s=2$. 即有 $\rho_0=\rho_{01}\dot{+}\rho_{02}$, 其复化为 $\rho\dot{+}\rho^*$, 故 ρ_{01} 与 ρ_{02} 之复化为 ρ 与 ρ^*, 因而 $\rho_{01}(\rho_{02})$ 为第一类不可约实表示. 于是 V 上有非退化对称双线性函数在 $\rho_{01}^C(G_0)$ 下, 因而在 $\rho(G_0)$ 下不变. 这与假设矛盾. 故 (ρ_0,V_0) 不可约. (ρ,V) 是第二类不可约实表示的复化的一个不可约子表示.

设 (ρ_0,V_0) 是 G_0 的第二类不可约实表示, 其复化为 (ρ,V). σ 为 V 对应 V_0 的半对合. 于是

$$(\rho,V)=(\rho_1+\bar{\rho}_1,V_1\dot{+}\sigma V_1).$$

设在 V_1 上有 $\rho_1(G_0)$ 不变非退化对称双线性函数. 于是由定理 4.6.2, 有 (ρ_{10},V_{10}) 为 G_0 的第一类不可约实表示, 其复化为 (ρ_1,V_1). 设 V_1 对应 V_{10} 的半对合为 τ_1, 则 $\bar{\tau}_1=\sigma\tau_1\sigma$ 为 σV_1 上的半对合. 于是 $\forall g\in G_0$, $\tau_1\rho_1(g)=\rho_1(g)\tau_1$, $\rho_1^*(g)|_{\sigma V_1}=\rho(g)\sigma|_{V_1}$, 所以在 V_1 上有

$$\bar{\tau}_1\rho_1^*(g)\sigma=\sigma\tau_1\sigma^2\rho(g)=\sigma\tau_1\rho(g)=\sigma\rho(g)\tau_1\sigma^2=\rho(g)\sigma\tau_1\sigma\sigma=\rho_1^*(g)\bar{\tau}_1\sigma.$$

即 $\forall g\in G_0$, 有 $\bar{\tau}_1\rho_1^*(g)=\rho_1^*(g)\bar{\tau}_1$. 于是 $\sigma'=\tau_1+\bar{\tau}_1$ 为 V 的半对合, 且 $\forall g\in G_0$, $\sigma'\rho(g)=\rho(g)\sigma'$. 因而有实表示 (ρ_0',V_0') 的复化为 (ρ,V), 于是 (ρ_0,V_0) 与 (ρ_0',V_0') 等价, 但 (ρ_0',V_0') 可约, 与 (ρ_0,V_0) 不可约矛盾. 故 V_1 上不存在 $\rho_1(G_0)$ 不变非退化对称双线性函数. □

推论 G_0 的任一不可约复表示 (ρ,V) 要么是 G_0 的第一类不可约实表示的复化, 要么是第二类不可约实表示的复化的一个不可约子表示.

定理 4.6.4 实连通紧李群 G_0 的两个不可约实表示 (ρ_0,V_0), (ρ_0',V_0') 等价的充分必要条件是它们的复化 (ρ,V), (ρ',V') 中有一个不可约子表示等价.

证 必要性是显然的. 只要证明充分性. 首先说明 (ρ_0,V_0) 与 (ρ_0',V_0') 属于同一类型. 若不然, 例如 (ρ,V) 不可约, 而 (ρ',V') 可约. 则有 $V'=V_1'\dot{+}\sigma'V_1'$, σ' 为 V' 对应 V_0' 的半对合. V_1', $\sigma'V_1'$ 是极小不变子空间. 于是可设 (ρ,V) 与 (ρ_1',V_1') 等价. 由定理 4.6.1, V 上有不变非退化对称双线函数. 由定理 4.6.3, (ρ_1',V_1') 不存在不变非退化对称双线性函数, 矛盾. 因而 (ρ_0,V_0) 与 (ρ_0',V_0') 有相同的类型.

设 (ρ_0,V_0) 为第一类型. 于是有 V 到 V' 的线性同构 $\mathcal{A}$ 满足: $\forall g\in G_0$,

$$\mathcal{A}\rho(g)=\rho'(g)\mathcal{A},\quad \sigma\rho(g)=\rho(g)\sigma,\quad \sigma'\rho'(g)=\rho'(g)\sigma',$$

其中 σ,σ' 分别为 V,V' 对应 V_0,V_0' 的半对合.

记 $\tilde{\mathcal{A}}=\sigma'\mathcal{A}\sigma$, 则 $\tilde{\mathcal{A}}$ 仍为 V 到 V' 上的线性同构, 且 $\forall g\in G_0$, 有

$$\tilde{\mathcal{A}}\rho(g)=\sigma'\mathcal{A}\sigma\rho(g)=\sigma'\mathcal{A}\rho(g)\sigma=\sigma'\rho'(g)\mathcal{A}\sigma=\rho'(g)\sigma'\mathcal{A}\sigma=\rho'(g)\tilde{\mathcal{A}}.$$

于是 $\mathcal{A}^{-1}\tilde{\mathcal{A}} \in GL(V)$, 而且有 $\mathcal{A}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}\rho(g) = \rho(g)\mathcal{A}^{-1}\tilde{\mathcal{A}}$, $\forall\, g \in G_0$. 由 Schur 引理, 有 $\mathcal{A}^{-1}\tilde{\mathcal{A}} = a\,\mathrm{id}_V$, 即 $\tilde{\mathcal{A}} = a\mathcal{A} = a\sigma'\tilde{\mathcal{A}}\sigma = |a|^2\tilde{\mathcal{A}}$. 故 $|a|^2 = 1$, $a = e^{\sqrt{-1}\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. 令 $\mathcal{B} = e^{\frac{\sqrt{-1}\theta}{2}}\mathcal{A}$, 则 $\mathcal{B} = e^{\frac{\sqrt{-1}\theta}{2}}\sigma'\tilde{\mathcal{A}}\sigma = e^{\frac{-\sqrt{-1}\theta}{2}}\sigma'\mathcal{A}\sigma$. 对 $v_0 \in V_0$, 有 $\sigma(v_0) = v_0$, 于是

$$\sigma'\mathcal{B}v_0 = \sigma'(e^{-\frac{\sqrt{-1}\theta}{2}}\sigma'\mathcal{A}\sigma)v_0 = e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}\sigma'\sigma'\mathcal{A}\sigma v_0 = \mathcal{B}v_0.$$

因而 $\mathcal{B}(V_0) = V_0'$ $(\dim V_0 = \dim V_0')$. 显然 $\forall g \in G_0$, $\mathcal{B}\rho(g) = \rho'(g)\mathcal{B}$. 故 (ρ_0, V_0) 与 (ρ_0', V_0') 等价.

设 (ρ_0, V_0), (ρ_0', V_0') 是第二类的. 则有 $V = V_1 \dot{+} \sigma V_1$, $V' = V_1' \dot{+} \sigma' V_1'$. 不妨设 (ρ_1, V_1) 与 (ρ_1', V_1') 等价, 即有 V_1 到 V_1' 的线性同构 $\mathcal{A}_1$, 使得 $\forall g \in G_0$, $\mathcal{A}_1\rho_1(g) = \rho_1'(g)\mathcal{A}_1$. 于是有 $\sigma'\mathcal{A}_1\sigma = \tilde{\mathcal{A}}_1$, 满足 $\tilde{\mathcal{A}}_1(\sigma V_1) = \sigma'(V_1')$, 而且 $\forall g \in G_0$, $\tilde{\mathcal{A}}_1\rho_1^*(g) = \rho_2^*(g)\tilde{\mathcal{A}}_1$. 于是 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \dot{+} \tilde{\mathcal{A}}_1$ 是 V 到 V' 的线性同构, 且 $\mathcal{B}(V_1) = V_1'$, $\mathcal{B}(\sigma V_1) = \sigma' V_1'$, $\rho'(g)\mathcal{B} = \mathcal{B}\rho(g)$, $\forall g \in G_0$. 因而 (ρ, V) 与 (ρ', V') 等价.

任取 $u, v \in V_1$, 有

$$\begin{aligned} &\sigma'\mathcal{B}(u + \sigma(v)) = \sigma'\mathcal{B}u + \sigma'\mathcal{B}\sigma(v) \\ =\ &\sigma'\mathcal{A}_1 u + \sigma'\tilde{\mathcal{A}}_1\sigma(v) = \sigma'\mathcal{A}_1\sigma(\sigma(u)) + \sigma'\sigma'\mathcal{A}_1\sigma\sigma(v) \\ =\ &\mathcal{B}(\sigma(u)) + \mathcal{B}(v) = \mathcal{B}\sigma(u + \sigma(v)), \end{aligned}$$

于是 $\mathcal{B}(V_0) = V_0'$. 因而 (ρ_0, V_0) 与 (ρ_0', V_0') 等价. □

定理 4.6.5 设 (ρ_0, V_0) 与 (ρ_0', V_0') 为实连通紧李群 G_0 的两个等价的不可约实表示. $(v, u), (v', u')'$ 分别为 V_0, V_0' 上不变内积. 则存在 V_0 到 V_0' 上的线性同构 $\mathcal{A}$, 使得

$$\rho_0'(g)\mathcal{A} = \mathcal{A}\rho_0(g), \quad (\mathcal{A}v, \mathcal{A}u)' = (v, u), \quad g \in G_0, v, u \in V_0.$$

证 因 (ρ_0, V_0) 与 (ρ_0', V_0') 等价, 于是有 V_0 到 V_0' 的线性同构 $\mathcal{B}$, 满足 $\rho_0'(g)\mathcal{B} = \mathcal{B}\rho_0(g)$, $\forall g \in G_0$. 有 V_0' 到 V_0 的线性映射 $\mathcal{B}^*$ 满足: $(u, \mathcal{B}^*(v')) = (\mathcal{B}(u), v')'$, $\forall\, u \in V_0, v' \in V_0'$. 称 $\mathcal{B}^*$ 为 $\mathcal{B}$ 的共轭. 于是 $\mathcal{B}^*\mathcal{B} \in GL(V_0)$, 且

$$\begin{aligned} &(u, \mathcal{B}^*\mathcal{B}\rho_0(g)v) = (\mathcal{B}(u), \mathcal{B}\rho_0(g)v)' = (\mathcal{B}(u), \rho_0'(g)\mathcal{B}(v))' = (\rho_0'(g^{-1})\mathcal{B}(u), \mathcal{B}(v))' \\ =\ &(\mathcal{B}\rho_0(g^{-1})u, \mathcal{B}(v))' = (\rho_0(g^{-1})u, \mathcal{B}^*\mathcal{B}(v)) = (u, \rho_0(g)\mathcal{B}^*\mathcal{B}(v)), \end{aligned}$$

因而有 $\mathcal{B}^*\mathcal{B}\rho_0(g) = \rho_0(g)\mathcal{B}^*\mathcal{B}, \forall g \in G_0$. 设 $(\rho, V), (\rho', V')$ 分别是 $(\rho_0, V_0), (\rho', V_0')$ 的复化, 于是有 $\mathcal{B}^*\mathcal{B}\rho(g) = \rho(g)\mathcal{B}^*\mathcal{B}$, $\forall g \in G_0$.

1) (ρ_0, V_0), (ρ_0', V_0') 是第一类, 则 (ρ, V), (ρ', V') 不可约. 于是由 Schur 引理, 有 $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = c\,\mathrm{id}_V$. 取 $u \neq 0$, $u \in V_0$, 有 $(u, \mathcal{B}^*\mathcal{B}(u)) = (\mathcal{B}(u), \mathcal{B}(u))' > 0$. 故知 $c > 0$. 令 $\mathcal{A} = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\mathcal{B}$, 则 $\mathcal{A}V_0 = V_0'$, 且 $\forall g \in G_0$, 有 $\rho_0'(g)\mathcal{A} = \mathcal{A}\rho_0(g)$; $\forall u, v \in V_0$, 有

$(\mathcal{A}(u),\mathcal{A}(v))' = \dfrac{1}{c}(\mathcal{B}(u),\mathcal{B}(v))' = \dfrac{1}{c}(u,\mathcal{B}^*\mathcal{B}(v)) = (u,v).$

2) $(\rho_0,V_0),(\rho_0',V_0')$ 为第二类, 则有 $V = V_1 \dot{+} \sigma V_1$, $V' = V_1' \dot{+} \sigma' V_1'$. 因为 $\mathcal{B}V_0 = V_0'$, 所以 $\sigma'\mathcal{B} = \mathcal{B}\sigma$. 于是可取 $V_1' = \mathcal{B}(V_1)$, 此时 $\sigma'V_1' = \sigma'\mathcal{B}(V_1) = \mathcal{B}(\sigma V_1)$. 令 $\mathcal{B}|_{V_1} = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}|_{\sigma V_1} = \bar{\mathcal{B}}_1$, $\mathcal{B}^*|_{V_1'} = \mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}^*|_{\sigma V_1'} = \bar{\mathcal{B}}_1^*$, 因为 $(\rho_1,V_1),(\rho_1^*,\sigma V_1)$ 不可约, 从 Schur 引理知 $\mathcal{B}_1^*\mathcal{B}_1 = c_1\,\mathrm{id}_{V_1}$, $\bar{\mathcal{B}}_1^*\bar{\mathcal{B}}_1 = c_2\,\mathrm{id}_{V_2}$, 且 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. 对 $v_0 \in V_0$, 有 $v_1 \in V_1$ 使得 $v_0 = v_1 + \sigma(v_1)$, 于是有

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B}(v_0) = \mathcal{B}_1^*\mathcal{B}_1 v_0 + \bar{\mathcal{B}}_1^*\bar{\mathcal{B}}_1\sigma(v_0) = c_1 v_1 + c_2\sigma(v_1) \in V_0.$$

因而 $c_1 = c_2 = c > 0$. 则 $\mathcal{A} = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\mathcal{B}$ 为所求的线性同构. □

第 5 章　例外李群的实现

本章介绍例外李群的实现. 根据定理 3.2.2, 连通紧单李群实际上就是其李代数的自同构群的连通分支. 因而实现例外李群, 本质上就是实现例外李代数.

Clifford 代数模与旋量群的表示对实现例外李群有非常重要的作用.

我们介绍利用正交李代数的旋表示来实现例外单李代数的方法.

由于 Clifford 代数是有限群的群代数, 因而可以用有限群关于其子群的诱导表示得到 Clifford 代数模与旋量群的表示, 也可以导出例外李群理论的建立, 例如参考文献 [17].

例外李群 E_8 是很重要的, 因为 E_6, E_7, F_4, G_2 都是可以作为 E_8 的子群得到.

G_2, F_4 也可以从表 Cayley 代数, Jordan 代数得到. 而 Cayley 代数, Jordan 代数等都是非结合代数. 这些非结合代数与几何, 物理学等也有密切的联系. 因篇幅所限我们不作介绍.

5.1　旋　表　示

在 2.10 小节中我们知道了 $Spin(m)$ 是 $SO(m)$ 的二重覆盖群. 因而它们有相同的李代数 $so(m)$. 复化就得到了 $so(m, \mathbf{C})$. 设 $D = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 于是 $so(m, \mathbf{C})$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 为: $m = 2n$ 时, $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(D, -D)\}$; $m = 2n+1$ 时, $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(0, D, -D)\}$. 由于 $\mathfrak{h}$ 上的函数

$$\lambda_i(\mathrm{diag}(D, -D)) = x_i, \quad \lambda_i(\mathrm{diag}(0, D, -D)) = x_i$$

是线性的, 而且 $so(m, \mathbf{C})$ 的根系 Δ, 素根系 Π 均可由这些线性函数生产.

所谓旋表示是 $so(m, \mathbf{C})$ 的某些基础表示. 旋表示不仅在实现例外单李代数中起着关键性的作用, 而且在李群, 几何及物理学中也有不可忽视的地位.

下面要用到单李代数的根对应的余根等, 可在文献 [2] 的第五章中查到. 很自然, 我们将 $so(m, \mathbf{C})$ 分成两类来处理.

Ⅰ. $B_n = so(2n+1, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 2)$. 此时, B_n 的根系为

$$\Delta = \{\pm\lambda_k, \pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n, i < j\},$$

素根系为

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n\}.$$

由于

$$(\lambda_n, \lambda_n) = \frac{1}{2(2n-1)}, (\lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1}) = \frac{1}{2n-1},$$

于是余素根系为

$$\Pi^\vee = \{2(2n-1)(\lambda_i - \lambda_{i+1}), 4(2n-1)\lambda_n, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}.$$

由此不难求得基础表示 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 的最高权为

$$\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

定义 5.1.1 以$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ 为最高权的基础表示 ρ_n 称为 $so(2n+1,\mathbf{C})$ 的**旋表示**. 以后记为 σ, 其最高权记为 ω.

以 Λ_σ 记旋表示 σ 的权系, 则

$$\Lambda_\sigma = \left\{\pm\frac{1}{2}\lambda_1 \pm \frac{1}{2}\lambda_2 \pm \cdots \pm \frac{1}{2}\lambda_n\right\}.$$

Ⅱ. $D_n = so(2n, \mathbf{C})(n \geqslant 4)$. 此时, D_n 的根系为

$$\Delta = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

素根系为

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_{n-1} + \lambda_n\}.$$

由于

$$(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{4(n-1)}\delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

故余素根系为

$$\Pi^\vee = \{4(n-1)(\lambda_i - \lambda_{i+1}), 4(n-1)(\lambda_{n-1} + \lambda_n) | 1 \leqslant i \leqslant n-1\}.$$

由此不难求得基础表示 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 的最高权为

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-2,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n),$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n).$$

定义 5.1.2　以$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\pm\lambda_n)$ 为最高权的基础表示 ρ_n, ρ_{n-1} 称为 $so(2n,\mathbf{C})$ 的**旋表示**, 分别记为 σ_1, σ_2, 其最高权分别记为 ω_1, ω_2.

以 Λ_{σ_i} 记旋表示 σ_i 的权系, 则

$$\Lambda_{\sigma_1}=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\middle|\text{其中有偶数个}-\right\},$$

$$\Lambda_{\sigma_2}=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\middle|\text{其中有奇数个}-\right\}.$$

引理 5.1.1　李代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 的子空间

$$\mathrm{Cl}(V)_2=L\{e_ie_j|1\leqslant i<j\leqslant n=\mathrm{dim}V\},$$

$$\mathrm{Cl}(V)_{12}=L\{e_k, e_ie_j|1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

均为李代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 的子代数, 且它们分别同构于李代数 $so(n,\mathbf{C})$ 与 $so(n+1,\mathbf{C})$.

证　显然, 若 i,j,k 互不相等, 有

$$[e_ie_j, e_je_k]=2e_ie_k.$$

而 i,j,k,l 互不相等, 则

$$[e_ie_j, e_ke_l]=0,\quad [e_ie_j, e_ie_j]=0.$$

于是 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 是子代数.

设 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 到 $so(n,\mathbf{C})$ 的线性映射 f 满足

$$f(e_ie_j)=2(E_{ij}-E_{ji}).$$

显然, 这是线性同构, 且由简单的计算知, f 是李代数的同构.

其次, 由

$$[e_i,e_j]=e_ie_j-e_je_i,$$
$$[e_i,e_je_k]=0,\quad \text{若 } i,j,k \text{ 互不相等},$$
$$[e_i,e_ie_k]=2e_k,\quad \text{若 } i\neq k,$$

知 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 是子代数.

设 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 到 $so(n+1,\mathbf{C})$ 的线性映射 g 满足

$$g(e_i)=2\sqrt{-1}(E_{1,i+1}-E_{i+1,1}),$$

$$g(e_ie_j)=2(E_{i+1,j+1}-E_{j+1,i+1}).$$

显然, 这是线性同构, 且由简单的计算知 g 为李代数的同构. □

特别地, 当 $\dim V=2n$ 时, 由 2.10 小节的习题 8 知, 李代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 同构于 $gl(2^n,\mathbf{C})$. 由文献 [2] 之定理 7.2.5 知, $\mathrm{Cl}(V)_2, \mathrm{Cl}(V)_{12}$ 均为 $gl(2^n,\mathbf{C})$ 的子代数, 且分别同构于 $so(2n,\mathbf{C})$ 与 $so(2n+1,\mathbf{C})$. 这样, 我们就得到了 D_n 与 B_n 的 2^n 维表示.

定理 5.1.1 设 V 是 $2n$ 维复线性空间, B 为 V 的非退化对称双线性函数. $e_1, e_2, \cdots, e_{2n}$ 满足 $B(e_i,e_j)=\delta_{ij}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$, $\mathrm{Cl}(V)$ 为 V 的 Clifford 代数. 又设

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},$$

$\mathrm{Cl}(V)$ 到 $\underbrace{\mathbf{C}^{2\times2}\otimes\mathbf{C}^{2\times2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^{2\times2}}_{n\text{个}}$ 的代数同构 f 满足:

$$f(e_i)=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes P\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$f(e_{n+i})=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes Q\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

则

1) f 在 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 上的限制是 $so(2n+1,\mathbf{C})$ 的旋表示 σ;

2) f 在 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 上的限制是 $so(2n,\mathbf{C})$ 的两个旋表示 σ_1,σ_2 的和 $\sigma_1+\sigma_2$.

证 由引理 5.1.1 知 $\mathrm{Cl}(V)_{12}, \mathrm{Cl}(V)_2$ 分别同构于

$$so(2n+1,\mathbf{C}),\quad so(2n,\mathbf{C}).$$

又由于 f 为代数同构, 故在 $\mathrm{Cl}(V)_{12}, \mathrm{Cl}(V)_2$ 上的限制分别为 $so(2n+1,\mathbf{C}), so(2n,\mathbf{C})$ 的表示.

1) 设 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由定理 3.9.1 知

$$so(2n+1,\mathbf{C})=g(2n+1,I_{2n+1},\mathbf{C})$$

有 Cartan 子代数

$$\left\{SY\begin{pmatrix}0&0&0\\0&D&0\\0&0&-D\end{pmatrix}Y\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{C}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\sqrt{-1}D\\0&\sqrt{-1}D&0\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{C}\right\}.$$

再由引理 5.1.1 的证明知 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 到 $so(2n+1,\mathbf{C})$ 的同构 g, 此时满足:

$$SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y=-\frac{\sqrt{-1}}{2}g\left(\sum_i x_ie_{i+1}e_{n+i+1}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}&2\sqrt{-1}fg(SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y)\\=&\sum_{i=1}^n x_i\underbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}_{i个}\otimes\begin{pmatrix}-\sqrt{-1}&0\\0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\\&fg(SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y)\\=&\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}x_i\underbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}_{i个}\otimes\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2.\end{aligned}$$

故 f 在 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 上的限制的权系为

$$\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\cdots\pm\lambda_n)\right\},$$

且每个权的重数均为 1, 故此表示为 σ.

2) 设 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由定理 3.9.2 知 $so(2n,\mathbf{C})=g(2n,I_{2n},\mathbf{C})$ 有 Cartan 子代数

$$\begin{aligned}&\left\{S_1Y_1\begin{pmatrix}D&0\\0&-D\end{pmatrix}Y_1\middle|x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{C}\right\}\\=&\left\{\begin{pmatrix}0&-\sqrt{-1}D\\\sqrt{-1}D&0\end{pmatrix}\middle|x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{C}\right\}.\end{aligned}$$

经与 1) 类似的讨论知 f 在 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 上限制的权系为

$$\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\cdots\pm\lambda_n)\right\}=\Lambda_{\sigma_1}\cup\Lambda_{\sigma_2}.$$

由于 $\Lambda_{\sigma_1}\cap\Lambda_{\sigma_2}=\varnothing$, 故此表示为 $\sigma_1+\sigma_2$ 且每个权的重数均为 1. □

定理 5.1.2 设 V 为 $\mathbf{C}$ 上 $2n$ 维线性空间, $e_1,e_2,\cdots,e_{2n}$ 为基, 作为 $\mathrm{Cl}(V)$ 中元素, 满足

$${e_i}^2=1\ (1\leqslant i\leqslant 2n),\quad e_ie_j=-e_je_i\ (i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant 2n).$$

f 为 $\mathrm{Cl}(V)$ 到 $\mathbf{C}^{2^n\times 2^n}$ 的满足定理 5.1.1 中条件的代数同构. 则

1) $\mathrm{tr}f(e_i)=0, 1\leqslant i\leqslant 2n$;

2) $\mathrm{tr}f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_j)=-2^n\delta_{ij}, 1\leqslant i,j\leqslant 2n$;

3) $\mathrm{tr}f(e_ie_j)f(e_ke_l)=-2^n\delta_{ik}\delta_{jl}, 1\leqslant i<j\leqslant 2n, 1\leqslant k<l\leqslant 2n$;

4) $\mathrm{tr}f(e_i)f(e_je_k)=0, 1\leqslant i\leqslant 2n, 1\leqslant j<k\leqslant 2n$;

5) $\mathrm{tr}f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_j)^2=-2^n, i\neq j$;

6) $\mathrm{tr}f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_i)^2=2^n$;

7) $\mathrm{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(e_je_k))^2=2^n, i\neq j, j=k, i\neq k$;

8) $\mathrm{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(e_ie_k))^2=-2^n, i<k$;

9) $\mathrm{tr}(f(\sqrt{-1}e_k)f(e_ie_k))^2=-2^n, i<k$;

10) $\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_je_k))^2=-2^n, i<j<k$;

11) $\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_i))^2=-2^n, k<i<j$;

12) $\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_l))^2=2^n, i<j, k<l, i,j,k,l$ 两两不等;

13) $\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_ie_j))^2=2^n, i<j$.

证 由定理 5.1.1 知

$$\mathrm{tr}f(e_i)=\mathrm{tr}f(e_i)f(e_je_k)=0.$$

由于

$$e_ie_j=-e_je_i,\quad \forall i\neq j,$$

故

$$\mathrm{tr}f(e_i)f(e_j)=0,\quad i\neq j;\quad (\sqrt{-1}e_i)^2=-e_i^2=-1.$$

因此

$$\mathrm{tr}f(\sqrt{-1}e_i)^2=-2^n.$$

又有

$$\begin{aligned}
&e_ie_je_je_l=e_ie_l=-e_le_i,\quad l\neq i,\\
&e_ie_je_ie_l=-e_je_l=e_le_j,\quad j\neq l,\\
&e_ie_je_ke_i=e_je_k=-e_ke_j,\quad k\neq j,\\
&e_ie_je_ie_j=-1,\\
&e_ie_je_ke_l=-e_le_ie_je_k,\quad i,j,k,l\ \text{互不相等},
\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{tr}f(e_ie_j)f(e_ke_l)=-2^n\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

至此, 定理所叙述的公式中不包含平方的部分已证完. 注意到若 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 两两不等, 有

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})^2=(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}1,$$

则容易验证上述公式中包含平方的部分. □

5.2 G_2 的实现

本节首先用李群的方法给出紧例外李群 G_2 的实现; 其次证明 G_2 是 $so(7,\mathbf{C})$ 的一个子代数.

下面先给出稍后要用到的结果.

引理 5.2.1 1) $\sigma^+: Spin(6) \cong SU(4)$, 其维数, 秩分别为 15, 3, 则 Dynkin 图 ○——— ○ ———○;

2) $\sigma: Spin(5) \cong Sp(2)$, 其维数, 秩分别为 10, 2, 则 Dynkin 图 ○ ⟹ ○.

3) $Spin(3) \cong SU(2) \cong Sp(1) = S^3 \subset \mathbf{H}$;

4) $Spin(4) \cong S^3 \times S^3$.

证 只要注意到 $Spin(n), SU(4), Sp(1) = S^3, Sp(2)$ 等都是连通、单连通的紧李群, 及其相应的 Dynkin 图就知上述结论成立. □

推论 1) $Spin(5)$ 可递地作用在单位球 $S^7 \subset \sigma(Spin(5)) = Sp(2)$ 上;

2) $Spin(6)$ 可递地作用在 $\{(x,z)|x \in S^5 \subset \mathbf{R}^6, z \in S^7 \subset \sigma^+(Spin(6)) = SU(4)$ 上;

3) $Spin(7)$ 可递地作用在 $\{(x,y,z)|x,y \in S^6 \subset \mathbf{R}^7$, 正交; $z \in S^7 \subset \sigma(Spin(5)) = Sp(2)\}$ 上.

证 1) 因为 $Sp(2)$ 可递地作用于 $S^7 \subset \mathbf{H}^2$ 上.

2) $Spin(6)$ 覆盖 $SO(6)$, 后者可递地作用于 S^5 上. 取一适当的 x, 例如 $x = (0,\cdots,0,1)$, 于是 x 的迷向子群为 $Spin(5)$. $\sigma^+|_{Spin(5)} = \sigma$. 由 1) 知, $Spin(5)$ 可递地作用于 $S^7 \subset \sigma(Spin(5) = Sp(2)$ 上. 可适当选取 $z \in S^7 \subset \sigma^+(SPin(5)) = SU(4))$, 使其迷向子群为 $SU(3) \subset U(3) \subset SO(6) \subset Spin(6)$.

3) $Spin(7)$ 覆盖 $SO(7)$, $SO(7)$ 在 S^6 上作用可递. 选 $y = (0,\cdots,0,1)$, 则 y 的迷向子群为 $Spin(6) = {\sigma^+}^{-1}(SU(4))$.

定理 5.2.1 设 $Spin(7)$ 的子群 G 为 $z \in S^7 \subset \Delta$ 的迷向子群. 则 G 是连通, 单连通紧李群, 其 Dynkin 为 G_2, 且可递地作用于 $\{(x,y)|(x,y) \in S^6 \subset \mathbf{R}^7$, 正交$\}$.

证 根据引理 5.2.1 的推论之 3) 知, G 是 $Spin(7)$ 的闭子群, $Spin(7)$ 在 S^7 上可递, 于是

$$\dim G = \dim Spin(7) - \dim S^7 = 21 - 7 = 14.$$

设 H 为 G 中点 $y = (0,0,\cdots,0,1)$ 的迷向子群, 则 H 也是 $Spin(6)$ 中保持 z 不动的子群. 适当选取点 z, 可取 $H = SU(3) \subset Spin(6)$. 由 $SU(3)$ 知, S^6 是连通和单连通的, 而 $G/H = S^6$, 故 G 是连通、单连通的紧李群.

下面决定 G 的根. 我们知道 $H = SU(3)$ 伴随作用于 Lie$H \subset$ Lie$G$. 下面欲知道 H 如何作用于 S^6 在 y 处的切空间 Lie$G$/Lie$H$. 由构造 $S^6 = Spin(7)/Spin(6)$, 所以需要看 $Spin(6)$ 在 Lie$Spin(7)$/Lie$Spin(6)$ 上的作用. 此作用的权为 $\{\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}$. 从几何观察, S^6 在点 $(0, \cdots, 0, 1)$ 的切空间是 $\mathbf{R}^6$, 此空间的前 6 个坐标和 $Spin(6)$ 在其上的作用如通常. $T \subset SU(3)$ 作用在 Lie$G$ 上, 且有权 $\{0, 0, \pm(x_1 - x_2), \pm(x_2 - x_3), \pm(x_3 - x_1), \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}$, T 是极大的, 除去两个 0, 正好为 G_2 的根系. □

由上面的证明可以得到 G_2 的两个显然的表示, 如下:

推论 1) G_2 作用于 $\mathbf{R}^7$ 上的 7 维表示, 权为 $\{0, \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}$;

2) G_2 的伴随表示是 14 维, 秩为 2, 权为 $\{0, 0, \pm(x_1 - x_2), \pm(x_2 - x_3), \pm(x_3 - x_1), \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}$.

下面介绍第二种方法. 这是李代数的方法

在 $so(7, \mathbf{C})$ 的 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(0, x_1, x_2, x_3, -x_1, -x_2, -x_3) | x_i \in \mathbf{C}\}$$

中取子代数

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \mathrm{diag}(0, x_1, x_2, x_3, -x_1, -x_2, -x_3) \middle| \sum_{i=1}^{3} x_i = 0 \right\}.$$

令

$$G_{\lambda_1 - \lambda_2} = G'_{\lambda_2 - \lambda_1} = E_{23} - E_{65},$$

$$G_{\lambda_1 - \lambda_3} = G'_{\lambda_3 - \lambda_1} = E_{24} - E_{75},$$

$$G_{\lambda_2 - \lambda_3} = G'_{\lambda_3 - \lambda_2} = E_{34} - E_{76},$$

则不难证明

$$\mathfrak{h}_0 + \sum_{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{C} G_{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j$$

是一个单子代数同构于 A_2. 再令

$$G_{\lambda_1} = -G'_{-\lambda_1} = \sqrt{2}(E_{12} - E_{51}) - (E_{37} - E_{46}),$$

$$G_{\lambda_2} = -G'_{-\lambda_2} = \sqrt{2}(E_{13} - E_{61}) - (E_{27} - E_{45}),$$

$$G_{\lambda_3} = -G'_{-\lambda_3} = \sqrt{2}(E_{14} - E_{71}) - (E_{26} - E_{35}),$$

则不难证明

$$\begin{aligned}
&[G_{\lambda_i}, G_{-\lambda_j}] = 3(E_{i+1,i+1} - E_{i+4,i+4}) - \mathrm{diag}(0, I_3, -I_3),\\
&[G_{\lambda_i}, G_{-\lambda_i}] = 3G_{\lambda_i-\lambda_j}, (i \neq j)\\
&[G_{\lambda_i-\lambda_j}, G_{\lambda_k}] = -\delta_{ik}G_{\lambda_j},\\
&[G_{\lambda_i-\lambda_j}, G_{-\lambda_k}] = \delta_{jk}G_{-\lambda_i},\\
&[G_{\lambda_i}, G_{\lambda_j}] = -\mathrm{sgn}(i,j,k)2G_{-\lambda_K},\\
&[G_{-\lambda_i}, G_{-\lambda_j}] = \mathrm{sgn}(i,j,k)2G_{\lambda_K}.
\end{aligned}$$

这里

$$\mathrm{sgn}(i,j,k) = \begin{cases} 0, & 若i,j,k中有相等的,\\ 1, & 若(i,j,k)为偶排列,\\ -1, & 若(i,j,k)为奇排列. \end{cases}$$

因而令 $\Delta = \{\pm\,\lambda_i, \lambda_i - \lambda_j | 1 \leqslant i \leqslant 3, j \neq i, 1 \leqslant j \leqslant 3\}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{C}G_\alpha,$$

则 $\mathfrak{g}$ 是 $so(7, \mathbf{C})$ 的一个 14 维子代数.

再证明 $V = \mathbf{C}^7$ 是不可约 $\mathfrak{g}$-模. 记 V 中典型基 $e_1 = v_0, e_2 = v_1, e_3 = v_2, e_4 = v_3, e_5 = v_{-1}, e_{-2}, e_7 = v_{-3}$. 取 $H = \mathrm{diag}(0, 1, 2, -3, -1, -2, +3)$, 则 $\{v_i\}$ 为 $\mathfrak{h}$ 的属于不同值的特征向量. 因而 V 的任何非零子模 V_1 必至少包含一个 v_i. 但由

$$\begin{aligned}
&G_{\pm\lambda_i}v_0 = \mp\sqrt{2}v_{\mp i}, && G_{-\lambda_i}v_i = -\sqrt{2}v_0,\\
&G_{\lambda_i-\lambda_j}v_j = v_i, && G_{\lambda_i-\lambda_j}v_{-i} = -v_j,\\
&G_{\pm\lambda_i}v_{\pm j} = \varepsilon v_k, && \varepsilon = \pm 1, \{i,j,k\} = \{1,2,3\},
\end{aligned}$$

推知 $V_1 = V$, 即 V 为单 $\mathfrak{g}$-模.

设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想 (即根基). 由李代数理论知, 有 $v \in V, v \neq 0$ 使得 $Rv = \lambda(R)v,\ \ \forall R \in \mathfrak{r}$. (参见文献 [2]) 因此 $V_1 = \{v \in V | Rv = \lambda(R)v, \forall R \in \mathfrak{r}\}$ 是 V 的非零子空间. 容易证明 V_1 是 V 的子 $\mathfrak{g}$-模, 故 $V_1 = V$. 因而 $\mathfrak{r} \subseteq \mathbf{C}I_7$. 但是 $\mathrm{tr}G = 0,\ \forall G \in \mathfrak{g}$, 故 $\mathfrak{r} = \{0\}$. 这样我们知道是 $\mathfrak{g}$ 半单李代数.

由于 $\dim(A_1 \oplus A_1) = 6, \dim A_2 = 8, \dim B_2 = \dim C_2 = 10$, 故 $\mathfrak{g}$ 只能是复半单李代数 G_2.

5.3 李代数 F_4 与 E_8

本节将利用由 Clifford 代数得到的 $so(2n+1, \mathbf{C})$ 与 $so(2n, \mathbf{C})$ 的表示来构造例外单李代数 F_4 与 E_8.

引理 5.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 为 F 上的李代数, V 是 $\mathfrak{g}$-模. 若 φ 是 $V\times V$ 到 $\mathfrak{g}$ 的映射, 并满足下列条件:

1) φ 是反对称双线性的, 或 $\varphi(X,X)=0,\forall X\in V$;

2) $\varphi(X,Y)Z+\varphi(Y,Z)X+\varphi(Z,X)Y=0,\forall X,Y,Z\in V$; (1)

3) $[E,\varphi(X,Y)]=\varphi(EX,Y)+\varphi(X,EY),\forall E\in\mathfrak{g};X,Y\in V$, (2)

则线性空间 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dot{+}V$ 对下面的括积

$$[E_1+X_1,E_2+X_2]=[E_1,E_2]+E_1\cdot X_2-E_2\cdot X_1+\varphi(X_1,X_2)\ (\forall E_1,E_2\in\mathfrak{g},X_1,X_2\in V)$$

构成 F 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的子代数.

证 显然, 上述括积是双线性的, 且

$$[E+X,E+X]=0,\quad \forall E\in\mathfrak{g},X\in V,$$

因而, 我们只要验证 Jacobi 等式. 注意到

$$\begin{aligned}&[E_1+X_1,[E_2+X_2,E_3+X_3]]\\=&[E_1,[E_2,E_3]]+E_1E_2X_3-E_1E_3X_2-[E_2,E_3]X_1\\&-\varphi(X_2,X_3)X_1+\varphi(X_1,E_2X_3-E_3X_1)+[E_1,\varphi(X_2,X_3)].\end{aligned}$$

将 $(1,2,3)$ 依次换为 $(3,1,2),(2,3,1)$, 又得两式. 然后将三式相加, 利用 V 为 $\mathfrak{g}$-模及 (1), (2) 两式即可证明 Jacobi 等式. 由于 φ 的双线性, 故要验证 (1), (2) 只要取 X,Y,Z 及 E 为基元素即可. □

引理 5.3.2 设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的基, 且 $[E_i,E_j]=\sum\limits_k C_{ij}^k E_k$. 又 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为 $\mathfrak{g}$-模 V 的基, 且 $E_iX_\alpha=\sum\limits_\beta d_{\alpha\beta}^i X_\beta$, $1\leqslant i\leqslant m$; $1\leqslant\alpha\leqslant n$. 记 $D^i=(d_{\alpha\beta}^i)$, $1\leqslant i\leqslant m$. 如果 $D^i(i=1,2,\cdots,m)$ 满足:

1) $D^i\in\mathbf{R}^{n\times n},(D^i)'=-D^i$;

2) $\operatorname{tr}(D^iD^k)=-n\cdot\delta_{ik}$;

3) $\operatorname{tr}\left(\sum\limits_{i,k}(D^iD^k)^2\right)=\dfrac{1}{2}mn^2$,

则 $V\times V$ 到 $\mathfrak{g}$ 中映射:

$$\varphi\left(\sum_\alpha\lambda_\alpha X_\alpha,\sum_\beta\mu_\beta X_\beta\right)=\sum_{\alpha,\beta,i}\lambda_\alpha\mu_\beta d_{\alpha\beta}^i E_i$$

满足引理 5.3.1 中的三个条件.

证 由 D^i 的反对称性, 知

$$\varphi(X_\alpha,X_\beta)=-\varphi(X_\beta,X_\alpha),$$

即 φ 满足条件 1).

又

$$\begin{aligned}&[E_i,\varphi(X_\alpha,X_\beta)]-\varphi(E_iX_\alpha,X_\beta)-\varphi(X_\alpha,E_iX_\beta)\\=&\sum_{j,k}d^j_{\alpha\beta}C^k_{ij}E_k-\sum_{\gamma,k}d^i_{\alpha\gamma}d^k_{\gamma\beta}E_k-\sum_{\gamma,k}d^i_{\beta\gamma}d^k_{\alpha\gamma}E_k\\=&\sum_k(\sum_j d^j_{\alpha\beta}C^k_{ij}-\sum_\gamma d^i_{\alpha\gamma}d^k_{\gamma\beta}-\sum_\gamma d^i_{\beta\gamma}d^k_{\alpha\gamma})E_k.\end{aligned}$$

另一方面, 由

$$[E_i,E_k]X_\alpha-E_i(E_kX_\alpha)+E_k(E_iX_\alpha)=0$$

知

$$\sum_j C^j_{ik}d^j_{\alpha\beta}-\sum_\gamma d^i_{\gamma\beta}d^k_{\alpha\gamma}+\sum_\gamma d^k_{\gamma\beta}d^i_{\alpha\gamma}=0,$$

故

$$\begin{aligned}&[E_i,\varphi(X_\alpha,X_\beta)]-\varphi(E_iX_\alpha,X_\beta)-\varphi(X_\alpha,E_iX_\beta)\\=&\sum_k\sum_j d^j_{\alpha\beta}(C^k_{ij}+C^j_{ik})E_k.\end{aligned}$$

但是, 由 $\mathrm{tr}D^iD^k=-n\delta_{ik}$ 知

$$\begin{aligned}0=&\mathrm{tr}[D^i,D^jD^k]=\mathrm{tr}D^j[D^i,D^k]+\mathrm{tr}[D^i,D^j]D^k\\=&\mathrm{tr}(\sum_l C^l_{ik}D^jD^l)+\mathrm{tr}(\sum_l C^l_{ij}D^lD^k)=-n(C^j_{ik}+C^k_{ij}),\end{aligned}$$

即

$$C^j_{ik}=-C^k_{ij}.$$

因此知 φ 满足条件 3).

又对于 $X_\alpha,X_\beta,X_\gamma$, 有

$$\begin{aligned}&\varphi(X_\alpha,X_\beta)X_\gamma+\varphi(X_\beta,X_\gamma)X_\alpha+\varphi(X_\gamma,X_\alpha)X_\beta\\=&\sum_{i,\delta}(d^i_{\alpha\beta}d^i_{\gamma\delta}+d^i_{\beta\gamma}d^i_{\alpha\delta}+d^i_{\gamma\alpha}d^i_{\beta\delta})X_\delta.\end{aligned}$$

记

$$P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\sum_i(d^i_{\alpha\beta}d^i_{\gamma\delta}+d^i_{\beta\gamma}d^i_{\alpha\delta}+d^i_{\gamma\alpha}d^i_{\beta\delta}).$$

由 D^i 的反对称性, 知

$$P(\pi(\alpha),\pi(\beta),\pi(\gamma),\pi(\delta))=\mathrm{sgn}\pi\cdot P(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\quad\forall\pi\in S_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}}.$$

π 分别为奇, 偶置换时, 其 $\mathrm{sgn}\pi$ 分别为 $-1, 1$.

又由于

$$\mathrm{tr} D^i D^k = \sum_{\alpha,\beta} d^i_{\alpha\beta} d^k_{\beta\alpha},$$

$$\mathrm{tr}(D^i D^k)^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d^i_{\alpha\beta} d^k_{\beta\gamma} d^i_{\gamma\delta} d^k_{\delta\alpha},$$

故

$$\sum_{i,k} \mathrm{tr}(D^i D^k)^2 - 2\sum_{i,k} \mathrm{tr}(D^i D^k)^2 = \sum_{i,k} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d^i_{\alpha\beta} d^i_{\gamma\delta} (d^k_{\beta\alpha} d^k_{\delta\gamma} - 2 d^k_{\beta\gamma} d^k_{\delta\alpha})$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(P(\beta,\alpha,\delta,\gamma) - 2P(\beta,\gamma,\delta,\alpha)) = 3 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^2.$$

但是

$$\sum_{i,k} \mathrm{tr}(D^i D^k)^2 - 2\sum_{i,k} \mathrm{tr}(D^i D^k)^2$$
$$= \sum_{i,k} (-n\delta_{ik})^2 - 2\mathrm{tr} \sum_{i,k} (D^i D^k)^2 = mn^2 - mn^2 = 0.$$

由于 $d^i_{\alpha\beta} \in \mathbf{R} (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n)$, 故 $P(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbf{R}$, 于是

$$P(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0.$$

故 φ 也满足条件 2). □

定理 5.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbf{C}$ 上单李代数, V 是不同构于 $\mathfrak{g}$-模 $\mathfrak{g}$ 的不可约 $\mathfrak{g}$-模. $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 V 的基. 又

$$E_i X_\alpha = \sum_\beta d^i_{\alpha\beta} X_\beta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha \leqslant n.$$

记 $D^i = (d^i_{\alpha\beta})$. 如果 D^i 满足下列条件:

1) D^i 是反对称实矩阵;

2) $\mathrm{tr}(D^i D^k) = -n \cdot \delta_{ik}$;

3) $\mathrm{tr}\left(\sum_{i,k} (D^i D^k)^2\right) = \frac{1}{2} mn^2$,

那么线性空间 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 对括积

$$[E+X, F+Y] = [E,F] + EY - FX + \varphi(X,Y), \quad \forall E, F \in \mathfrak{g}, \quad X, Y \in V$$

(其中 $\varphi(X,Y)$ 由 $\varphi(X_\alpha, X_\beta) = \sum_i d^i_{\alpha\beta} E_i$ 确定) 成为复单李代数.

证　由引理 5.3.2 知, $\varphi(X,Y)$ 满足引理 5.3.1 的三个条件. 故由引理 5.3.1 知, $\mathfrak{g}_1$ 按上述括积确为复李代数, 且由 $D^i \neq 0$, 知 V 是非平凡 $\mathfrak{g}$-模.

显然, 对于 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上的如下作用:

$$E\cdot(F+X)=[E,F+X]=[E,F]+E\cdot X,\quad \forall E,F\in\mathfrak{g},X\in V,$$

$\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$-模, 且 $\mathfrak{g},V$ 均为 $\mathfrak{g}_1$ 的不可约子模, 而且互不同构. 故 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 是不可约子模的直和分解. 设 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的理想, 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{n}]\subseteq\mathfrak{n}$. 因而 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$-模 $\mathfrak{g}_1$ 的子模. 于是, 只有 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g},\mathfrak{n}=V$ 与 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}+V,\mathfrak{n}=\{0\}$. 注意到, $\mathfrak{g}$ 与 V 均不是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想. 故 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{n}=\{0\}$. 因而 $\mathfrak{g}_1$ 是单李代数. □

我们利用紧单李代数的表示论的一些结果 (参见 4.6 一节), 可以将定理 5.3.1 中的条件 1) 换成更容易判断的条件.

现假定 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数, $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的素根系, (ρ,V) 为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示, 其权系, 最高权分别为 Λ,λ. 又 $\mathfrak{h}=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$ 满足 $(\mathfrak{h},\alpha_i)=2$, 其中 $1\leqslant i\leqslant l$. 故 (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, $T(\rho)=(\lambda,\mathfrak{h})$.

定理 5.3.2　*设 (ρ,V) 为复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 如果 (ρ,V) 满足下列条件:*

1) $\Lambda=-\Lambda$, $T(\rho)$ *为偶数;*
2) *有 $\mathfrak{g}$ 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得 $\mathrm{tr}\rho(x_i)\rho(x_k)=-\dim V\cdot\delta_{ik}$;*
3) $\mathrm{tr}\sum\limits_{i,k}(\rho(x_i)\rho(x_k))^2=\dfrac{1}{2}\dim\mathfrak{g}\cdot(\dim V)^2$,

则在 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 中可定义括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数.

证　由于 $\Lambda=-\Lambda$, 故 (ρ,V) 与其对偶表示同构. 因而存在 V 上的非退化不变双线性函数 $f(u,v)$. 由于 (ρ,V) 不可约, 且 $T(\rho)$ 为偶数, 故 $f(u,v)$ 是对称的, 且在 V 中有实线性空间 V_0 使得 $V=V_0\dotplus\sqrt{-1}V_0$. (ρ,V_0) 为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式 $\mathfrak{g}_0$ 的表示, 且 $f(u,v)$ 在 V_0 上的限制是正定的. 故在 V_0 中有基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 使得 $f(v_i,v_j)=\delta_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n$. 由于

$$f(\rho(x)u,v)+f(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}_0,$$

故 $\rho(x)$ 在基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 下的矩阵为实反对称矩阵.

显然

$$\beta_\rho(x,y)=\mathrm{tr}\rho(x)\rho(y),\quad x,y\in\mathfrak{g}$$

为 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数, 且

$$\beta_\rho(x,y)=c(x,y),$$

(x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, $c>0$, (x,y) 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制是负定的. 于是若有 $\mathfrak{g}$ 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得

$$\mathrm{tr}(\rho(x_i)\rho(x_k))=-n\delta_{ik},\quad 1\leqslant i,k\leqslant m,$$

则有 $\mathfrak{g}$ 的基 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in\mathfrak{g}_0$, 使得

$$(x_i,x_k)=(y_i,y_k),\quad 1\leqslant i,k\leqslant m.$$

因而

$$\mathrm{tr}(\rho(y_i)\rho(y_k))=-n\delta_{ik},\quad 1\leqslant i,k\leqslant m,$$

而且 $y_i=\sum\limits_{j=1}^m t_{ji}x_j$, 其中 (t_{ji}) 满足 $\sum\limits_{j=1}^m t_{ji}t_{jk}=\delta_{ik}$, 故 $\sum\limits_{j=1}^m t_{ij}t_{kj}=\delta_{ik}$. 于是

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\sum_{i,k}(\rho(y_i)\rho(y_k))^2\\&=\mathrm{tr}\sum_{i,k}\sum_{s,s_1,r,r_1}t_{si}t_{rk}t_{s_1i}t_{r_1k}\rho(x_s)\rho(x_r)\rho(x_{s_1})\rho(x_{r_1})\\&=\mathrm{tr}\sum_{s,r}(\rho(x_s)\rho(x_r))^2=\frac{1}{2}mn^2.\end{aligned}$$

因而 $\mathfrak{g}$ 的基 $y_1,y_2,\cdots,y_m,V$ 的基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 均满足定理 5.3.1 的三个条件. 故 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 为单李代数. □

有了以上准备, 现在我们可以实现 F_4 与 E_8 了.

定理 5.3.3 设 $\mathfrak{g}=so(9,\mathbf{C}),(\rho,V)$ 为其旋表示, 则在线性空间 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数, 此代数恰为 F_4.

证 $so(9,\mathbf{C})$ 的素根系为 $\{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3,\lambda_3-\lambda_4,\lambda_4\}$. 旋表示 (ρ,V) 的权系为

$$\Lambda=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\lambda_3\pm\lambda_4)\right\}=-\Lambda.$$

故 (ρ^*,V^*) 与 (ρ,V) 等价.

又 (ρ,V) 的最高权为 $\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$. 由 $(\mathfrak{h},\alpha_i)=2$, 立即可得 $(\mathfrak{h},\lambda_i)=10-2i$. 因而, 有 $T(\rho)=10$, 故定理 5.3.2 中条件 1) 满足.

以 8 维线性空间 V_8 的 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V_8)$ 中的 $\mathrm{Cl}(V_8)_{12}$ 来实现 $so(9,\mathbf{C})$ 的旋表示. $\mathrm{Cl}(V_8)_{12}$ 中有基

$$\{\sqrt{-1}e_i,e_je_k|1\leqslant i\leqslant 8,1\leqslant j<k\leqslant 8\}.$$

由定理 5.1.2 容易算出

$$\{\rho(\sqrt{-1}e_i),\rho(e_je_k)|1\leqslant i\leqslant 8,1\leqslant j<k\leqslant 8\}$$

满足定理 5.3.2 中的条件 2) 和 3).

由于单李代数 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 中 V 为 $\mathfrak{g}$-模, 且任何权均为非零权. 故 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数, 即 $r(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g} = 4$.

又 $\dim\mathfrak{g}_1 = \dim\mathfrak{g} + \dim V = 52$, 而 $\dim A_4 = 24, \dim B_4 = \dim C_4 = 36, \dim D_4 = 28$, 因而 $\mathfrak{g}_1$ 只可能是 F_4. □

定理 5.3.4 设 $\mathfrak{g} = so(16, \mathbf{C}), (\rho, V)$ 为其旋表示 σ_2(见定义 5.1.2). 则在线性空间 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数, 此代数恰为 E_8.

证 $so(16, \mathbf{C})$ 的素根系为 $\{\lambda_i - \lambda_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant 7; \lambda_7 + \lambda_8\}$. 旋表示 σ_1 的权系为

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \cdots \pm \lambda_8) \middle| \text{奇数个负号} \right\} = -\Lambda,$$

故 (ρ^*, V^*) 与 (ρ, V) 同构. 又若 $(\mathfrak{h}, \alpha_i) = 2$, 易得 $(\mathfrak{h}, \lambda_i) = 16 - 2i, 1 \leqslant i \leqslant 8$. 故 $T(\rho) = 28$ 为偶数. 因而定理 5.3.2 的条件 1) 满足.

由于 $\dim(V \dotplus V^*) = 2^8$, 而 $\dim V = \dim V^*$, 故 $\dim V = 2^7$.

以 16 维线性空间 V_{16} 的 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V_{16})$ 中的 $\mathrm{Cl}(V_{16})_2$ 来实现 $so(16, \mathbf{C})$ 的旋表示 $\sigma_1 + \sigma_2$, 即 $V + V^*$. 注意到定理 5.1.2 中的关系, 限制在 V 上有

$$\mathrm{tr}(f(e_i e_j) f(e_k e_l))_V = -2^7 \delta_{ik} \delta_{jl},$$

$$\mathrm{tr}(f(e_i e_j) f(e_k e_l))_V^2 = \pm 2^7,$$

其中正负号的选取仍按定理 5.1.2 中的条件选取. 由此不难算出 $\{f(e_i e_j)|_V | 1 \leqslant i < j \leqslant 16\}$ 满足定理 5.3.2 中的条件 2) 和 3). 于是 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数. 由于 $\mathfrak{g}$-模 V 中无零权, 故 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 因而 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}$ 的秩均为 8, 且

$$\dim\mathfrak{g}_1 = \dim\mathfrak{g} + \dim V = 248.$$

但 $\dim A_8 = 80, \dim B_8 = \dim C_8 = 136, \dim D_8 = 120$. 故 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数 E_8. □

由定理 5.3.3 与定理 5.3.4 我们还可以知道 F_4 与 E_8 的根系分别为:

$$\pm(\lambda_i - \lambda_j),\ \pm\lambda_k,\ \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4);$$

$$\pm(\lambda_i - \lambda_j),\ \pm(\lambda_i + \lambda_j),\ \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \cdots \pm \lambda_8)\text{ , 其中奇数个负号.}$$

关于 E_6, E_7 均可作为 E_8 中的子代数来实现.

另外, 我们要指出本章中用到的单李代数及其表示都是具体构造出来的, 事先不必知道例外单李代数的存在. 具体构造出来这也是存在性的一种证明.

在文献 [17] 中, J. F. Adams 给出了由群 E_8 构造群 F_4, E_6, E_7 的方法.

1) E_7 的构造.

第一步, 用映射 $Spin(12)\times Spin(4)\longrightarrow Spin(16)$ 导出

$$\begin{array}{ccccccc} & & Spin(4) & \longrightarrow & Spin(12)\times Spin(4) & \longrightarrow & Spin(16) \longrightarrow E_8 \\ & \nearrow & \downarrow & & & & \\ SU(2) \longrightarrow U(2) & \longrightarrow & SO(4) & & & & \end{array}$$

第二步, 求出 $SU(2)$ 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(SU(2))$.

第三步, $SU(2)$ 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(SU(2))$ 的单位连通分支就是例外李群 E_7.

2) E_6 的构造.

第一步, 用映射 $Spin(10)\times Spin(6)\rightarrow Spin(16)$ 导出

$$\begin{array}{ccccccc} & & Spin(6) & \longrightarrow & Spin(10)\times Spin(6) & \longrightarrow & Spin(16) \longrightarrow E_8 \\ & \nearrow & \downarrow & & & & \\ SU(3) \longrightarrow U(3) & \longrightarrow & SO(6) & & & & \end{array}$$

第二步, 求出 $SU(3)$ 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(SU(3))$.

第三步, $SU(3)$ 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(SU(3))$ 的单位连通分支就是例外李群 E_6.

3) F_4 的构造.

第一步, 用映射 $Spin(9)\times Spin(7)\rightarrow Spin(16)$ 导出

$$G_2\rightarrow Spin(7)\rightarrow Spin(16)\rightarrow E_8$$

第二步, 求出 G_2 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(G_2)$.

第三步, G_2 在 E_8 中的中心化子 $C_{E_8}(G_2)$ 的单位连通分支就是例外李群 F_4.

从本章讨论我们得到以下关系:

$$SU(2)\subset SU(3)\subset G_2\subset E_8,$$

$$F_4\subset E_6\subset E_7\subset E_8.$$

第 6 章　Riemann 对称空间

6.1　定　　义

定义 6.1.1　设 p 是 n 维 Riemann 流形 M 中的一点. 如果存在 M 的一个变换 $\sigma_p : M \longrightarrow M$ 满足下面三个条件:

1)　σ_p 是对合的, 即 $\sigma_p^2 = \mathrm{id}$;

2)　σ_p 是保长的;

3)　p 是 σ_p 的孤立不动点, 即有 p 的邻域 U, 使得

$$\forall q \in U, \sigma_p(q) = q, \text{ 当且仅当 } p = q,$$

则称 p 是 M 的**对称中心**, σ_p 叫做关于 p 的**中心对称**.

定义 6.1.2　如果一个 Riemann 流形 M 对于 M 中任一点 p 都是对称中心, 则称 M 为 **Riemann 对称空间**.

以后将 Riemann 对称空间简单地叫做**对称空间**.

Euclid 空间 E^n 与球面 S^n 都是对称空间. 我们再举两个对称空间的例子.

例 6.1.1　**双曲空间**(The hyperbolic space)

我们在 $E^{n+1} = \mathbf{R} \times E^n$ 中引进 **Lorentz 度量**:

$$\langle (x_0, x), (y_0, y) \rangle_L = -x_0 y_0 + \langle x, y \rangle,$$

这里 $\langle x, y \rangle$ 是 E^n 中的 Euclid 度量. 令

$$H_1^n = \{(x_0, x) \in \mathbf{R} \times E^n | -x_0^2 + |x|^2 = -1,\ x_0 > 0\}.$$

于是 H_1^n 是 E^{n+1} 中的 n 维子流形.

事实上, 我们可以在 H_1^n 中建立卡如下: $(x_0, x) \in H_1^n$, 令

$$\mathrm{Crd}(x_0, x) = \frac{1}{1 + x_0} x \in B_1^n \subset E^n,$$

这里 B_1^n 是 E^n 中半径为 1 的球. 反过来, 若有 $u \in B_1^n$, 显然,

$$\left(\frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2}, \frac{2u}{1 - |u|^2} \right) \in H_1^n,$$

而

$$1+\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2}=\frac{2}{1-|u|^2}.$$

对于 $p=(1,0)$, 令 σ_p 为

$$\sigma_p(x_0,x)=(x_0,-x)$$

则不难验证 σ_p 满足定义 6.1.1 中条件 1)~3). 则 H_1^n 叫做**双曲空间**.

例 6.1.2 复射影空间(The complex projective space)　设 $\mathbf{E}=\mathbf{C}^n$ 为 n 维酉空间.$\langle x,y\rangle$ 为其内积. 令

$$SE=S_1\mathbf{E}=\{N\in\mathbf{E}|\langle N,N\rangle=1\},$$
$$\mathbf{E}^*=\mathbf{E}\setminus\{0\}.$$

又设 $P\mathbf{E}$ 为 $\mathbf{E}$ 中所有一维子空间的集合. 建立 $\mathbf{E}^*$ 到 $P\mathbf{E}$ 的映射 F 如下:

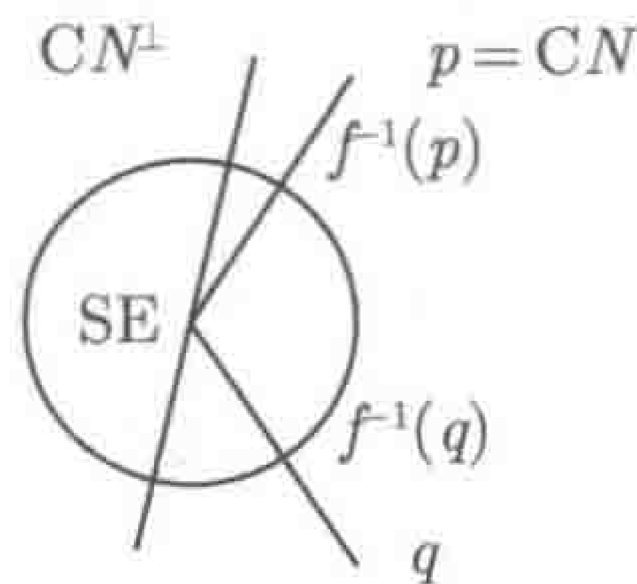
$$F(N)=\mathbf{C}N=p,\quad N\in\mathbf{E}^*.$$

由于 $S\mathbf{E}\subset\mathbf{E}^*$, 故可将 F 限制在 $S\mathbf{E}$ 上. 将此映射记为 f, 即

$$f=F|_{S\mathbf{E}}:S\mathbf{E}\to P\mathbf{E}.$$

f 称为 **Hopf 映射**. 对于 $p=\mathbf{C}N\in P\mathbf{E}$, 其逆像是一个大圆 (great circle), 即 $S\mathbf{E}$ 与一复线 (也就是一个二维实平面) $\mathbf{C}N$ 的交, 即

$$f^{-1}(p)=S\mathbf{E}\cap\mathbf{C}N.$$



下面我们来看 $P\mathbf{E}$ 的流形结构. 对 $N\in S\mathbf{E}$, 令

$$P\mathbf{E}_N=\{q|\langle N,f^{-1}(q)\rangle\neq 0\}=\{F(M)|\langle N,M\rangle\neq 0\}.$$

对于 $q=F(M)\in P\mathbf{E}_N$, 令

$$\mathrm{Crd}q=\frac{f^{-1}(q)}{\langle f^{-1}(q),N\rangle}-N=\frac{M}{\langle M,N\rangle}-N.$$

于是 $(\mathrm{Crd},P\mathbf{E}_N)$ 构成一个卡.

从几何上看, $\mathrm{Crd}q+N=\dfrac{f^{-1}(q)}{\langle f^{-1}(q),N\rangle}$ 是复线 $\mathbf{C}f^{-1}(q)$ 与复超平面 $\{X|\langle X,N\rangle=1\}$ 的交.

不难验证, 如此定义的流形结构 $P\mathbf{E}$ 为一个复流形 (称为**复射影空间**). 可以将其看成实流形并赋予 Riemann 结构. 因而 $P\mathbf{E}$ 是一个 Riemann 流形. 设有 $p\in P\mathbf{E}$. 又设 $N_p\in F^{-1}(p)$, 首先在 $\mathbf{E}$ 中定义线性变换 σ_p^* 满足下面条件:

$$\sigma_p^*|_{CN_p}=\mathrm{id},\quad \sigma_p^*|_{(CN_p)^\perp}=-\mathrm{id},$$

其中 $(\mathbf{C}N_p)^\perp$ 为 $\mathbf{C}N_p$ 的正交补. 显然 $\sigma_p^*(\mathbf{E}^*)=\mathbf{E}^*$; $F(\sigma_p^*(N))=F(\sigma_p^*(N_1))$ 当且仅当 $F(N)=F(N_1)$. 于是有 $P\mathbf{E}$ 到 $P\mathbf{E}$ 的映射 σ_p 使得

$$\sigma_p\cdot F=F\cdot\sigma_p^*.$$

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{E}^* & \xrightarrow{\sigma_p^*} & \mathrm{E}^*\\ F\downarrow & & \downarrow F\\ P\mathrm{E} & \xrightarrow{\sigma_p} & P\mathrm{E}\end{array}$$

由 $\sigma_p^{*2}=\mathrm{id}$, 故 $\sigma_p^2=\mathrm{id}$. 同样可验证定义 6.1.1 中条件 2) 与 3) 成立, 即 $p=\mathbf{C}N_p$ 为 $P\mathbf{E}$ 的对称中心. p 是任意选取的, 故 $P\mathbf{E}$ 是 Riemann 对称空间.

6.2 Riemann 对称空间的等距变换群

本节要证明 Riemann 对称空间的等距变换群 $I(M)$ 是可递地作用于 M 上的 Lie 变换群.

引理 6.2.1 设 M 是一个 Riemann 对称空间. $p\in M,\sigma$ 为关于 p 的中心对称. 则

$$(d\sigma)_p=-\mathrm{id}_{M_p}.$$

证 由于 p 是 σ 的孤立不动点, 在 p 处可取正规邻域 N_p 满足: $\forall q\in N_p\setminus\{p\}$, $\sigma(q)\neq q$. 由于 $\sigma(p)=p$, 故 $(d\sigma)_p(M_p)=M_p$. 这里, M_p 是 p 点的切空间. 又由 $\sigma^2=\mathrm{id}_M$, 故 $(d\sigma)_p^2=\mathrm{id}_{M_p}$. 于是

$$M_p=V^-\dot{+}V^+,$$

其中

$$V^-=\{X\in M_p|(d\sigma)_pX=-X\},$$
$$V^+=\{X\in M_p|(d\sigma)_pX=X\}.$$

若 $\sigma^2\neq\mathrm{id}_M$, 则有 $X\in V^+$, $X\neq 0$. 令 $\gamma(t)=\mathrm{Exp}tX$. 则有包含 t 的区间 I_1, 使得

$$\sigma(\gamma(t))=\mathrm{Exp}t(d\sigma)_pX=\gamma(t),\quad \forall t\in I_1,$$

这与 p 为 σ 的孤立不动点矛盾. 于是 $V^+=\{0\}$, $M_p=V^-$. 即 $(d\sigma)_p=-\mathrm{id}_{M_p}$. □

顺便指出, 若 M 是一个微分流形 (不一定是 Riemann 流形). $p \in M$, N_p 为 p 的一个正规邻域. 以 $\mathrm{Crd}q$ 表示 $q \in N_p$ 的正规坐标. 则由

$$\mathrm{Crd}S_p(q) = -\mathrm{Crd}q$$

确定的映射 S_p 称为对于 p 的**测地对称**. 如果对 M 的任一点 p 都有开邻域 N_p 使得 S_p 为仿射变换, 则称 M 为**仿射局部对称空间**. 可以证明, M 为仿射局部对称空间当且仅当 $T=0, \nabla_Z R = 0$.

引理 6.2.2 设 M 是 Riemann 对称空间, 则

$$\nabla_Z R = 0, \quad \forall Z \in \mathcal{D}^1(M). \tag{6.2.1}$$

证 首先证明

$$(\nabla_Z R)(X,Y) = [\nabla_Z, R(X,Y)] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y). \tag{6.2.2}$$

事实上, 我们将 ∇_Z 作用于张量场 $X \otimes Y \otimes R$ 上, 用 ∇_Z 的作用与缩并作用可换, 即得

$$\nabla_Z(R(X,Y)) = R(\nabla_Z, X, Y) + R(X, \nabla_Z Y) + (\nabla_Z R)(X,Y).$$

而等式左端恰为 $[\nabla_Z, R(X,Y)]$, 故 (6.2.2) 成立.

由 $\sigma \in I(M)$, 故 σ 是仿射变换, 因而有

$$\nabla_X = (d\sigma)^{-1} \cdot \nabla_{d\sigma(X)} \cdot d\sigma$$

在 $\mathcal{D}^1(M)$ 上成立. 又有

$$R(X,Y) = (d\sigma)^{-1} \cdot R(d\sigma(X), d\sigma(Y)) \cdot d\sigma,$$

再由 (6.2.2) 可得

$$(\nabla_Z R)(X,Y) = (d\sigma)^{-1}(\nabla_{d\sigma(Z)} R)(d\sigma(X), d\sigma(Y))d\sigma.$$

当 σ 为 p 点的中心对称时, 在 p 的切空间 M_p 诱导的变换 $d\sigma = -\mathrm{id}_{M_p}$. 于是有 $(\nabla_Z R)(X,Y) = -(\nabla_Z R)(X,Y)$. 故 $\nabla_Z R = 0$. □

引理 6.2.3 Riemann 对称空间 M 是完备 Riemann 流形.

证 根据 Riemann 结构的理论, 我们只要证明任一测地线段 $\gamma(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$ 均可开拓为测地线 $\gamma(t)\,(-\infty < t < +\infty)$.

不妨设 $\gamma(t)\,(-a \leqslant t \leqslant 0)$ 为一测地线段. 又设 $p = \gamma(0)$, $B_r(p)$ 为 p 的正规邻域, $V_r(0)$ 为 M_p 中对应 $B_r(p)$ 的正规邻域. 于是有 $X \in V_r(0)$ 使得

$$\gamma(t) = \mathrm{Exp}tX \in B_r(p), \quad -r < t \leqslant 0,$$

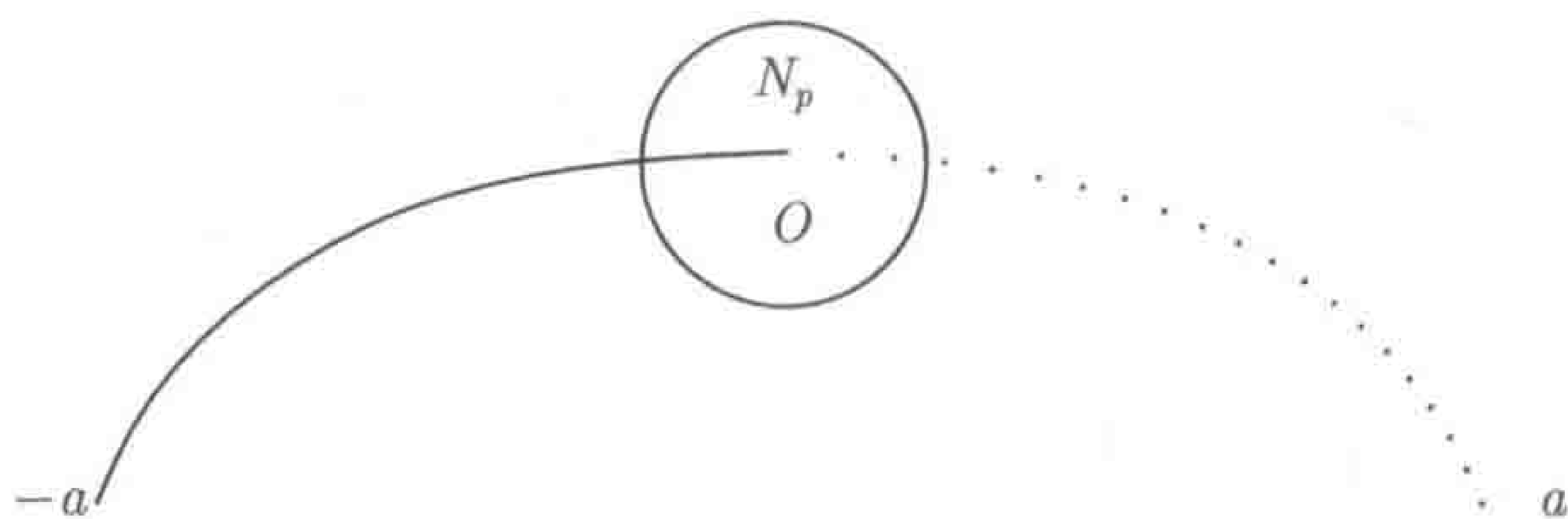
即 $tX \in V_r(0)$. 设 σ 为关于 p 的中心对称. 于是

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma(t)) =& \mathrm{Exp} - tX \quad (-r < t \leqslant 0)\\ =& \mathrm{Exp} t_1 X \quad (0 \leqslant t_1 < r),\end{aligned}$$

而 $\gamma_1(t) = \mathrm{Exp} tX(-r < t < r)$ 仍为测地线. 因而

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ \sigma\gamma(-t), & 0 \leqslant t \leqslant a \end{cases}$$

仍是测地线, 即将 $\gamma(t)$ 开拓到 $[-a, a]$(如下图所示). 故 M 是完备的 Riemann 流形. □



推论 1　设 $p, q \in M$, 则存在连接 p, q 的测地线段 γ, 使得 $L_\gamma = \rho(p, q)$.

推论 2　设 m 是连接 p, q 的测地线段 γ 的中点. σ_m 为关于 m 点的中心对称. 则 $\sigma_m(p) = q, \quad \sigma_m(q) = p$.

推论 3　Riemann 对称空间 M 的等距变换群 $I(M)$ 在 M 上的作用是可递的. 又若 $\tilde{K} = \{\sigma \in I(M) | \sigma(p_0) = p_0\}$ 为点 p_0 的迷向子群, 则 $\tilde{K}$ 为 $I(M)$ 的紧子群.

$I(M)$ 在 M 上的作用可递, 可由推论 2 得到. $\tilde{K}$ 为 $I(M)$ 的紧子群的证明可参看文献 [19]. □

引理 6.2.4　设 $\gamma(t)$ 是 Riemann 对称空间 M 中的一条测地线. 则 $\gamma(0) = p$, $\rho(\gamma(0), \gamma(t)) = |t|$(即 t 为弧长参数). M 关于 $\gamma(t)$ 的中心对称记为 $\sigma_{\gamma(t)}$. 令

$$T_{\gamma(t)} = \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\sigma_{\gamma(0)}.$$

则有

1) $T_{\gamma(t)}(\gamma(s)) = \gamma(s + t)$;

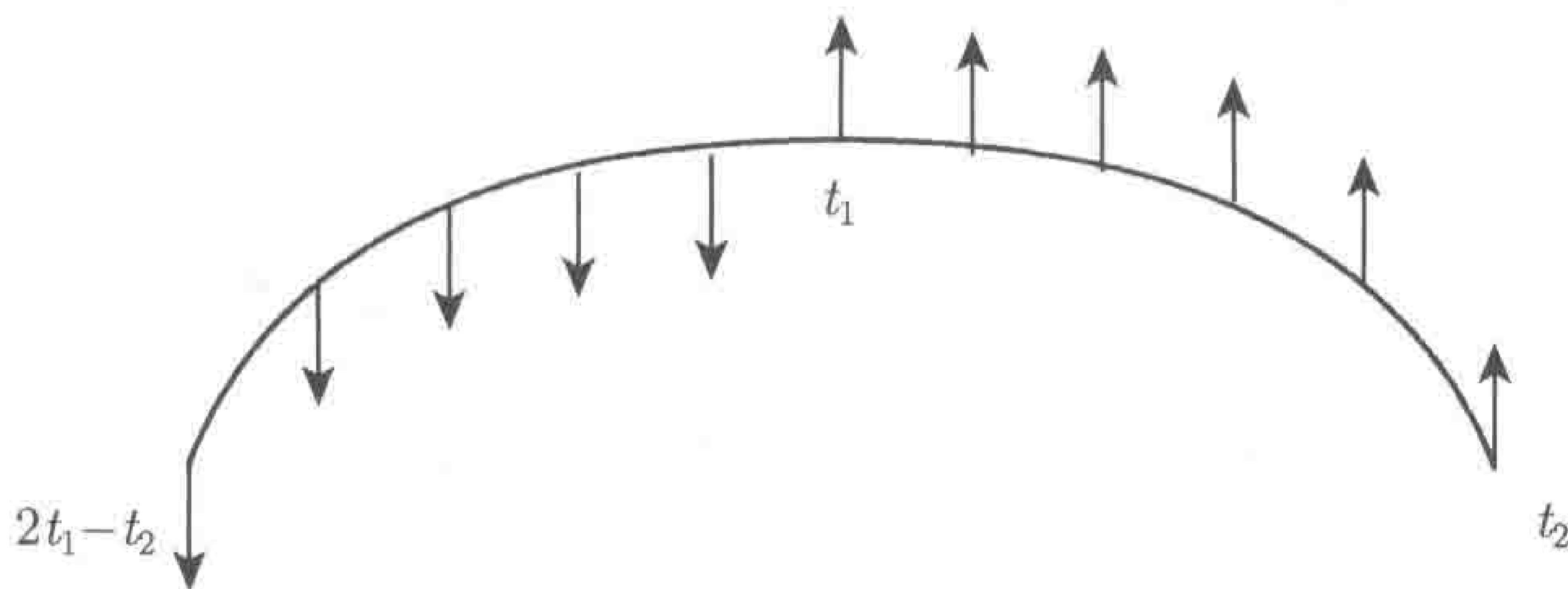
2) $dT_{\gamma(t)}$ 是 $\gamma(s)$ 的切空间 $M_{\gamma(s)}$ 到 $\gamma(s+t)$ 的切向量空间 $M_{\gamma(s+t)}$ 的沿 γ 的平行移动, 即

$$dT_{\gamma(t)}|M_{\gamma(s)} = \|_\gamma(s, s + t);$$

3) $T_{\gamma(t)}$ 是 $I(M)$ 中以 t 为参数的单参数子群. 因而 $T_{\gamma(t)}$ 决定了 M 的一个 Killing 场.

证 1) 因 $\sigma_{\gamma(0)}(\gamma(s))=\gamma(-s)$, $\frac{1}{2}((t+s)+(-s))=\frac{1}{2}t$, 故 $T_{\gamma(t)}(\gamma(s))=\gamma(s+t)$.

2) 设 $X(t)$ 是定义在 $\gamma(t)(t\in[t_1,t_2])$ 上的任一平行向量场, 令 $X'(2t_1-t)=d\sigma_{\gamma(t_1)}X(t)$. 则 $X'(2t_1-t)$ 是 $\gamma(t)(t\in[2t_1-t_2,t_1])$ 上的平行向量场, 且 $X'(t_1)=d\sigma_{\gamma(t_1)}X(t_1)=-X(t_1)$. $X'(2t_1-t)$ 与 $X(t)$ 的关系如下图所示



由此可见 $X'(2t_1-t_2)$ 是将 $-X(t_1)$ 平行移动到 $\gamma(2t_1-t_2)$, 即 $d\sigma_{\gamma(t_1)}X(t_2)=\|_\gamma(t_1,2t_1-t_2)(-X(t_1))$. 又 $X(t_1)$ 是将 $X(t_2)$ 平行移动到 $X(t_1)$. 故

$$\begin{aligned}d\sigma_{\gamma(t_1)}X(t_2)&=-\|_\gamma(t_1,2t_1-t_2)\|_\gamma(t_2,t_1)X(t_2)\\&=-\|_\gamma(t_2,2t_1-t_2)X(t_2).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}d\sigma_{\gamma(0)}|_{M_{\gamma(s)}}&=-\|_\gamma(s,-s),\\d\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}|_{M_{\gamma(-s)}}&=-\|_\gamma(-s,t+s),\end{aligned}$$

故 $dT_{\gamma(t)}|_{M_{\gamma(s)}}=\|_\gamma(s,s+t)$.

3) 设有 t_1,t_2 及 t, 于是有

$$\begin{aligned}T_{\gamma(t_1)}T_{\gamma(t_2)}(\gamma(t))&=\gamma(t_1+t_2+\gamma)=T_{\gamma(t_1+t_2)}\gamma(t),\\d(T_{\gamma(t_1)}T_{\gamma(t_2)})|_{M_{\gamma(t)}}&=\|_\gamma(t_2+t,t_1+t_2+t)\|_\gamma(t,t_2+t)\\&=\|_\gamma(t,t_1+t_2+t)\\&=dT_{\gamma(t_1+t_2)}|_{\gamma(t)}.\end{aligned}$$

由此可知 $T_{\gamma(t_1)}T_{\gamma(t_2)}=T_{\gamma(t_1+t_2)}$. 故 $T_{\gamma(t)}$ 是 $I(M)$ 中以 t 为参数的单参数子群. □

定理 6.2.1 设 M 为 Riemann 对称空间. $I(M)$ 为其等距变换群. 则在 $I(M)$ 上对其紧开拓扑有微分结构, 使得 $I(M)$ 为 M 的 Lie 变换群.

证 在 M 中取定一点 p_0. 设 $\tilde{K}$ 是 p_0 的迷向子群. M_{p_0} 为 p_0 的切空间, M_{p_0} 对于 g_{p_0} 构成一个 Euclid 空间. 以 $O(M_{p_0})$ 表示 M_{p_0} 的正交群. 作 $\tilde{K}$ 到 $O(M_{p_0})$ 的映射 θ: $\theta(k)=(dk)_{p_0}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{\text{Exp}} & \mathcal{D}^1(M) & \longrightarrow & M_{p_0} \\
\Big\downarrow k & & \Big\downarrow dk & & \Big\downarrow (dk)_{p_0} \\
M & \xleftarrow{\text{Exp}} & \mathcal{D}^1(M) & \longrightarrow & M_{p_0}
\end{array}
$$

在 M_{p_0} 中取标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n = \dim M)$, 在 M_{p_0} 的一个正规邻域 $B_r(p_0)$ 上取正规坐标系. 则 k 在正规邻域 $B_r(p_0)$ 上的表示式与 $(dk)_{p_0}$ 的表示式相同, 即有

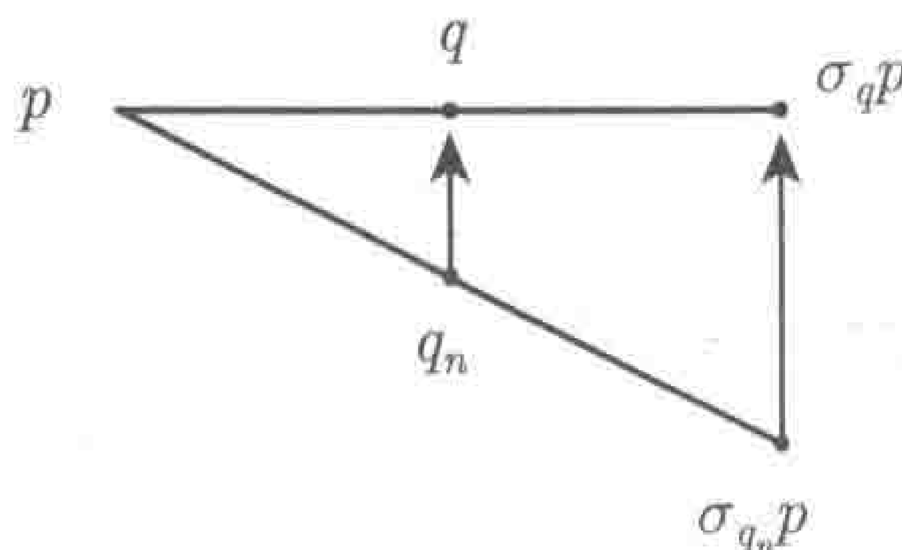
$$\text{Crd}(kq) = M((dk)_{p_0};\ X_1, \cdots, X_n)\text{Crd}q,$$

这里 $M(A;\ X_1, \cdots, X_n)$ 表示线性变换 A 在基 $X_1, \cdots, X_n$ 下的矩阵. 又 θ 是一一的连续映射, 故 θ 是同胚映射. 因而 $K^* = \theta(\tilde{K})$ 是 $O(M_{p_0})$ 的紧子群, 故为 $O(M_{p_0})$ 的 Lie 子群. 于是用 θ^{-1} 可将 K^* 的解析结构移植到 $\tilde{K}$ 上. 故 $\tilde{K}$ 是一个紧 Lie 群.

设 $I(M)$ 到 M 的自然映射为 π, 即 $\forall h \in I(M)$, $\pi(h) = hp_0$. 在 $I(M)$ 中构造子集 B(即构造 M 上的纤维空间 $I(M)$ 的一个局部截面) 使得 π 将 B 同胚地映到 $B_r(p_0)$ 上.

设 $\gamma(t)$ 是 $B_r(p_0)$ 中从 p_0 出发的测地线, t 为弧长参数. $\sigma_{\gamma(t)}$ 为关于 $\gamma(t)$ 的中心对称, $T_{\gamma(t)} = \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\sigma_{\gamma(0)}$. 作 $B_r(p_0)$ 到 $I(M)$ 的映射 ψ: $\psi(\gamma(t)) = T_{\gamma(t)} = \sigma_{\gamma(\frac{1}{2}}\sigma_{\gamma(0)}$. 显然 ψ 是一一映射. 下面证 ψ 是连续的. 只要证明如果 $\{q_n\}$ 是 M 中收敛于 q 的序列. 则 $\{\sigma_{q_n}\}$ 是 $I(M)$ 中收敛于 σ_q 的序列. 事实上, 如果 p 与 q 充分接近, 可以证明 $\{\sigma_{q_n}p\}$ 收敛于 $\sigma_q p$. 令

$$S = \{p \in M | \{\sigma_{q_n}p\}\text{收敛}\}$$



则可证明 S 既是 M 的非空开集, 也是闭集. 于是 $S = M$. 进而 $\{\sigma_{q_n}p\}$ 收敛于 $\sigma_q p$ 对任何 $p \in M$ 成立. 因而 $\{\sigma_{q_n}\}$ 收敛于 σ_q. 故 ψ 是连续的 (详细论述请参见文献 [19]).

令 $B = \psi(B_r(p_0))$, 则 $\pi|_B$ 是一一的, 而且 $\pi \cdot \psi = \text{id}_B$, 故 π 是 B 到 $B_r(p_0)$ 上的同胚映射. 而

$$B\tilde{K} = \pi^{-1}(B_r(p_0)) = \{bk | b \in B, k \in \tilde{K}\}$$

为 M 中开集. 对 $h \in B\tilde{K}, h = bk, b \in B, k \in \tilde{K}$, 有 $b = \psi(\pi(h))$. 因 $B \times \tilde{K}$ 到 $B\tilde{K}$ 上的映射 $(b, k) \to bk$ 是同胚映射, 因而, 若 U 为 $\tilde{K}$ 中开集, 则 BU 是 $B\tilde{K}$ 的

开集, 因而也是 $I(M)$ 的开集. 特别地, 取 id_M 在 $\tilde{K}$ 中的一个坐标邻域, 坐标系为 $(y_1,\cdots,y_m)$. $\pi(B)=B_r(p_0)$ 中坐标系记为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则

$$\varphi_{\mathrm{id}_M}(bk)=(x_1(\pi(b)),\cdots,x_n(\pi(b)),y_1(k),\cdots,y_m(k))$$

是 BU 到 $\mathbf{R}^{n+m}$ 中的一个开集的同胚映射. 因而 $\{BU,\varphi_{\mathrm{id}_M}\}$ 可作为 id_M 处的一个坐标卡. 只要证明 BU 对此坐标系为局部 Lie 群, 则 $I(M)$ 就是 Lie 群. 为此, 我们只要证明乘法运算是解析的就足够了.

设 $k\in\tilde{K},q\in M$, 则有

$$(k\sigma_q k^{-1})(kq)=kq, d(k\sigma_q k^{-1})_{kq}=(d\sigma_{kq})kq=-\mathrm{id}_{M_{kq}}.$$

因而有 $k\sigma_q k^{-1}=\sigma_{kq}$. 特别地, 取 $q=p_0$, 则有 $k\sigma_q k^{-1}=\sigma_{p_0}$.

现设 $b_1,b_2,b\in B,u_1,u_2,u\in U$, 而

$$b_1u_1b_2u_2=bu.$$

设 q 为从 p_0 到 b_2p_0 的测地线的中点. 故有

$$\sigma_q(p_0)=b_2p_0,\quad \sigma_q(b_2p_0)=p_0.$$

因而有 $b_2=\psi(b_2p_0)=\sigma_q\sigma_{p_0}$. 于是

$$u_1b_2u_1^{-1}=u_1\sigma_q\sigma_{p_0}u_1^{-1}=u_1\sigma_q u_1^{-1}\sigma_{p_0}=\sigma_{u_1(q)}\sigma_{p_0}=b^*.$$

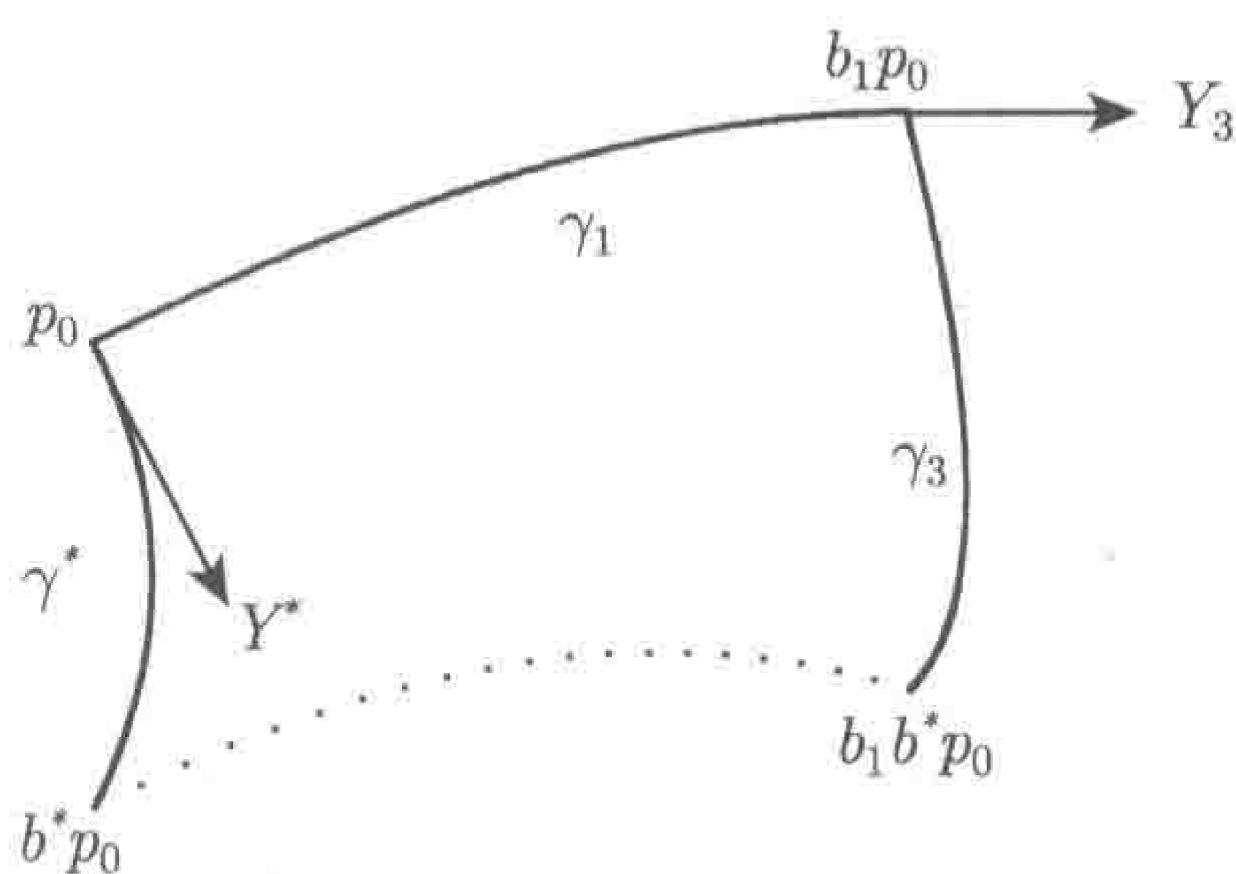
另一方面

$$\begin{aligned}&\rho(p_0,b^*p_0)=\rho(p_0,\sigma_{u_1(q)}\sigma_{p_0}p_0)=\rho(p_0,\sigma_{u_1(q)}p_0)\\=&2\rho(p_0,u_1(q))=2\rho(u_1(p_0),u_1(q))\\=&2\rho(p_0,q)=\rho(p_0,b_2p_0)<r.\end{aligned}$$

因而有 $b^*\in B$, 于是

$$b_1u_1b_2u_2=b_1b^*u_1^{-1}u_2=bu,$$

并有 $\mathrm{Crd}(\pi(b_1b^*))=\mathrm{Crd}(\pi(b))$. 而点 $b_1b^*p_0$ 可由点 b_1p_0 与 b^*p_0 如下决定: 以 γ_1,γ^* 分别表示由 p_0 至 b_1p_0 与 b^*p_0 的测地线 (均在 $B_r(p_0)$ 中). 又 Y_1,Y^* 为它们在 p_0 点的单位切向量. Y_3 是 Y^* 沿 γ_1 平行移动而得的向量, 即 $Y_3=\|_{\gamma_1}(p_0,b_1p_0)Y^*$. 考虑从 b_1p_0 出发, 以 Y_3 为切向量的测地线 γ_3 且使 $L_{\gamma_3}=L_{\gamma^*}$. 则 γ_3 的终点为 $b_1b^*p_0$.



因而 $\mathrm{Crd}(\pi(b_1b^*))$ 解析地依赖于 $\mathrm{Crd}(\pi(b_1))$ 与 $\mathrm{Crd}(\pi(b^*))$. 进而

$$\mathrm{Crd}(d(u(u_1^{-1}u_2)^{-1}X_i;\ X_1,X_2,\cdots,X_n)=\mathrm{Crd}(d(b^{-1}b_1b^*)X_i;\ X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

解析地依赖于 $\mathrm{Crd}b_1$, $\mathrm{Crd}b^*$. 又 $\tilde{K}$ 是 Lie 群. 由此可知 $\mathrm{Crd}u$ 解析地依赖于 $\mathrm{Crd}u_1$, $\mathrm{Crd}u_2$, $\mathrm{Crd}b_1$, $\mathrm{Crd}b^*$ 的坐标.

从这里知 $I(M)$ 是 Lie 群, 且 $(g_1,p)\to gp$ 是 $BU\times B_r(p_0)$ 到 $I(M)$ 中的解析映射. 故 $I(M)$ 是 M 的 Lie 变换群. □

更一般的结果是任一 Riemann 流形的等距变换群有自然的 Lie 群结构. 这一结果可参见文献 [23].

定理 6.2.2　设 M 是 Riemann 对称空间. 又 $p_0\in M$. $I(M)$ 的单位连通分支为 $G=I_0(M)$. $K=\tilde{K}\cap G=\{h\in G|hp_0=p_0\}$. 则有

1)　G 为连通 Lie 群, K 为 G 的紧子群. $hK\to hp_0(h\in G)$ 是 G/K 到 M 上的微分同胚.

2)　G 到 G 的映射 σ:

$$\sigma(h)=\sigma_{p_0}h\sigma_{p_0}$$

是 G 的对合自同构, 令

$$K_\sigma=\{k\in G|\sigma(k)=k\},$$

则 K_σ 为 G 的闭子群. 若 K_0 为 K_σ 的单位连通分支, 则

$$K_0\subseteq K\subseteq K_\sigma,$$

而且, K 中除 $\{\mathrm{id}_M\}$ 外, 不含 G 的正规子群.

3)　设 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 即 $\mathrm{Lie}G=\mathfrak{g}$, K 的 Lie 代数为 $\mathfrak{k}$, 即 $\mathrm{Lie}K=\mathfrak{k}$. 则

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}|(d\sigma)_{\mathrm{id}_M}X=X\}.$$

又若令

$$\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}|(d\sigma)_{\mathrm{id}_M}X=-X\},$$

则有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p},$$

其中 "$\dot{+}$" 表示线性空间的直和.

4) 若 π 为 G 到 M 上的自然映射, 即

$$\pi(h) = hp_0, \quad \forall h \in G,$$

记 $(d\pi)_{\mathrm{id}_M} = d\pi$, 则

$$d\pi(\mathfrak{k}) = \{0\}, \quad d\pi(\mathfrak{p}) = M_{p_0}.$$

5) 设 $X \in \mathfrak{p}$, 则以 p_0 为起点, $d\pi(X)$ 为切向量的测地线为

$$\gamma_{d\pi(X)}(t) = \exp tX \cdot p_0,$$

其中 exp 为 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射. 换句话说, M 的测地线是 G 的单参数子群的轨道.

又若 $Y \in M_{p_0}$, 则 $(d\exp tX)_{p_0}(Y)$ 是 Y 沿此测地线的平行移动.

证 1) 由商空间就可知此结果成立.

下面证明 2) 与 3). 显然, σ 是 $I(M)$ 的对合自同构, 且 $\sigma(G) = G$. 故 σ 可视为 G 的对合自同构. 又若 $k \in K$, 则 $dk|_{M_{p_0}} = d\sigma(k)|_{M_{p_0}}$. 于是 $\forall k \in K$, $\sigma(k) = k$. 即有 $K \subset K_\sigma$, 且 $(d\sigma)_{\mathrm{id}_M}|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{k}}$.

另一方面, 设 $X \in \mathfrak{g}$, 满足 $(d\sigma)_{\mathrm{id}_M} X = X$. 则有

$$\sigma(\exp tX) = \exp tX, \quad -\infty < t < +\infty.$$

于是 $(\sigma_{p_0} \exp tX \sigma_{p_0})p_0 = (\exp tX) \cdot p_0$, 即有

$$\sigma_{p_0}((\exp tX)p_0) = (\exp tX) \cdot p_0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

由于 p_0 是 σ_{p_0} 的孤立不动点, 于是

$$(\exp tX)p_0 = p_0, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

因而 $X \in \mathfrak{k}$, 即有 $K_0 \subseteq K \subseteq K_\sigma$.

由于 $I(M)$ 与 G 在 G/K 上作用是有效的, 故 K 中除 $\{\mathrm{id}_M\}$ 外, 别无 G 的正规子群.

由 σ 为对合自同构, 于是 $d\sigma$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. 因而 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$.

4) 由 Lie 变换群的熟知结果知 $(d\pi)_{\mathrm{id}_M}$ 为 $\mathfrak{g}$ 到 M_{p_0} 的线性同态, 而且 $\ker(d\pi)_{\mathrm{id}_M} = \mathfrak{k}$. 于是 $(d\pi)_{\mathrm{id}_M}(\mathfrak{p}) = M_{p_0}$.

最后, 讨论 5). 设 $X \in \mathfrak{p}$, $\gamma(t)$ 是以 p_0 为起点, $(d\pi)_{\mathrm{id}_M}X$ 为切向量的测地线. 参数 t 为从 p_0 到 $\gamma(t)$ 的弧长. 由引理 6.2.4 知 $T_{\gamma(t)} = \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\sigma_{p_0}$ 是 G 的单参数子群, 且

$$\gamma(t) = T_{\gamma(t)} \cdot p_0, \quad dT_{\gamma(t)}|_{M_{p_0}} = \|_\gamma(p_0, \gamma(t)).$$

设 $T_{\gamma(t)} = \exp tZ, Z \in \mathfrak{g}$. 于是由

$$\sigma T_{\gamma(t)} = \sigma_{p_0}\sigma_{\gamma(\frac{t}{2})}\sigma_{p_0}\sigma_{p_0} = \sigma_{\sigma_{p_0}(\gamma(\frac{t}{2}))}\sigma_{p_0} = \sigma_{\gamma(\frac{-t}{2})}\sigma_{p_0} = T_{\gamma(-t)},$$

故有 $d\sigma(Z) = -Z$. 由此可知 $Z \in \mathfrak{p}$. 但 $\pi(T_{\gamma(t)}) = \gamma(t)$, 故

$$(d\pi)_{\mathrm{id}_M}(Z) = (d\pi)_{\mathrm{id}_M}(X).$$

因而 $Z = X$. 故 $\gamma(t) = \exp tX \cdot p_0$. □

注　G 为 Lie 群. 若 H 是 G 的闭子群, 则对 $g \in G$, 可定义陪集空间 G/H 的变换 $\tau(g)$ 为

$$\tau(g)(xH) = gxH.$$

6.3　Riemann 对称对

定义 6.3.1　设 G 是一个连通 Lie 群. H 为 G 的一个闭子群. 如果有 G 的对合解析自同构 σ, 使得

$$(H_\sigma)_0 \subseteq H \subseteq H_\sigma,$$

其中

$$H_\sigma = \{g \in G | \sigma(g) = g\},$$

而 $(H_\sigma)_0$ 为 H_σ 的单位连通分支, 则称 (G, H) 为一个**对称对**.

又若 $\mathrm{Ad}_G H$ 是紧的, 则称 (G, H) 为 **Riemann 对称对**.

定理 6.3.1　设 (G, K) 是一个 Riemann 对称对. 对应的 G 的对合自同构为 σ. π 为 G 到 G/K 的自然映射. 设 $o = \pi(e)$, e 为 G 的恒等元. 则对 G/K 上的每个 G 不变 Riemann 结构 Q(这样的 Q 一定存在) 都成为一个 Riemann 对称空间. 关于 o 的中心对称 s_o 满足

$$\begin{aligned} &s_o \cdot \pi = \pi \cdot \sigma, \\ &\tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o, \quad \forall g \in G, \end{aligned}$$

这里 $\tau(g)$ 为 G/K 的变换, 定义为 $\tau(g)(bK) = gbK$.

证 为简单计, 令 $d\pi=(d\pi)_e, d\sigma=(d\sigma)_e, T_o$ 为 $o\in G/H$ 处切空间. $\mathfrak{g},\mathfrak{k}$ 分别为 G,K 的 Lie 代数. 由 $\sigma^2=\mathrm{id}_G$, 故 $(d\sigma)^2=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, 因而有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p},\quad \mathfrak{k}=E_1(\mathfrak{g},d\sigma),\quad \mathfrak{p}=E_{-1}(\mathfrak{g},d\sigma).$$

如果 $X\in\mathfrak{p}, k\in K$, 则有

$$\begin{aligned}&\sigma(\exp\mathrm{Ad}k(tX))=\sigma(k\cdot\exp tX\cdot k^{-1})\\ &=k\exp d\sigma(tX)\cdot k^{-1}=\exp(-t\mathrm{Ad}k\cdot X),\end{aligned}$$

由此可知 $d\sigma(\exp\mathrm{Ad}k\cdot X)=-(\mathrm{Ad}k\cdot X)$. 这样, $\mathfrak{p}$ 在 Ad_GK 的每个元素作用下不变. 由于 $\ker(d\pi)=\mathfrak{k}$, 故 $d\pi(\mathfrak{g})=T_0$, 且 $d\pi$ 是 $\mathfrak{p}$ 到 T_0 的同构映射. 再由

$$\pi(\exp\mathrm{Ad}k\cdot tX)=\pi(k\exp tXk^{-1})=\tau(k)\pi(\exp tX),$$

知有 $d\pi(\mathrm{Ad}k\cdot X)=d\tau(k)\cdot d\pi\cdot X, X\in\mathfrak{p}$.

由于 Ad_GK 是 $GL(\mathfrak{g})$ 的紧 Lie 子群, $\mathfrak{p}$ 又是它的不变子空间, 故有 $\mathfrak{p}$ 上的正定二次型 B 在其下不变. 于是 $Q_o=B\cdot(d\pi)^{-1}$ 为 T_o 上的二次型, 在 $d\tau(k)(k\in K)$ 下不变. 仍以 Q_o 表示 $T_o\times T_o$ 上对应的正定对称双线性型. 对每个 $p\in G/K$, 我们可以定义 $(G/K)_p\times(G/K)_p$ 上对称双线性型 Q_p 如下:

$$\begin{aligned}Q_p(d\tau(g)X_0,d\tau(g)Y_0)&=Q_0(X_0,Y_0),\\ X_0,Y_0&\in\mathfrak{p},\quad g\in G,\\ p&=g\cdot o=\tau(g)\{K\}.\end{aligned}$$

由 B 在 Ad_GK 下的不变性立即可以得到 Q_p 的定义的合理性. 即若 $\tau(g_1)\cdot\{K\}=\tau(g_2)\cdot\{K\}$, 则

$$Q_p(d\tau(g_1)X_0,d\tau(g_1)Y_0)=Q_p(d\tau(g_2)X_0,d\tau(g_2)Y_0).$$

又因为对每个 $g\in G$, $\tau(g)$ 是 G/K 的解析同胚, 所以 $p\to Q_p$ 是 G/K 上的解析 Riemann 结构, 而且在 G 的作用下不变. 反之, G/K 上的每个 G 不变 Riemann 结构, 通过 $(d\pi)^{-1}$ 也导出 $\mathfrak{p}$ 上一个不变二次型.

下面的任务是建立中心对称. 设 $g\in G$. 由

$$s_o(\pi(g))=\pi(\sigma(g))$$

所确定的 s_o 是 G/K 到 G/K 的映射, 且

$$s_o^2(\pi(g))=s_o(\pi(\sigma(g)))=\pi(\sigma^2(g))=\pi(g),$$

故 $s_o^2 = \mathrm{id}$, 且 $(ds_o)_o = -\mathrm{id}$. 由此可知, o 是 s_o 的孤立不动点. 下面证明, s_o 是 G/K 的等距变换. 设 $g \in G$, $p = \tau(g) \cdot o$, $X, Y \in (G/K)_p$. 则有 $X_0, Y_0 \in T_o$, 使得

$$X_0 = d\tau(g^{-1})X, \quad Y_0 = d\tau(g^{-1})Y.$$

又对 $x \in G$, 有

$$s_o\tau(g)xK = \sigma(gx)K = \sigma(g)\sigma(x)K = \tau(\sigma(g))s_o(xK),$$

即有 $s_o\tau(g) = \tau(\sigma(g))s_o$. 于是

$$\begin{aligned}
&Q(ds_o \cdot X, ds_o \cdot Y) = Q(ds_o d\tau(g)X_0, ds_o d\tau(g)Y_0)\\
=&Q(d\tau(\sigma(g))ds_oX_0, d\tau(\sigma(g))ds_oY_0) = Q(ds_oX_0, ds_oY_0)\\
=&Q(-X_0, -Y_0) = Q(d\tau(g)X_0, d\tau(g)Y_0)\\
=&Q(X, Y),
\end{aligned}$$

这里 Q 在何处取值的下标我们都省略不写, 是不会混淆的. 从这里可知 s_o 为 o 点的中心对称. 下面对 G/K 中任一点 $p = \tau(g) \cdot o$, 不难证明 $s_p = \tau(g)s_0\tau(g^{-1})$ 为 G/K 关于 p 点的中心对称. 于是 G/K 对于上面的 Riemann 结构 Q 就成了 Riemann 对称空间. □

注 1　从上面定理的证明可以看出, 中心对称 s_p 的定义与 G/K 上的 Riemann 结构的选择无关. 因而 s_p 对于 G/K 上的任何 G 不变 Riemann 结构是相同的.

注 2　由于 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathrm{Ad}_G K$ 的不变子空间, 故 $k \to \mathrm{Ad}_G k|_{\mathfrak{p}}$ 是 K 的一个以 $\mathfrak{p}$ 为表示空间的表示. 如果这是一个不可约表示, 则 $\mathfrak{p}$ 上不变二次型除了一个常数因子外是唯一确定的. 因而 G/K 上的 G 不变 Riemann 结构 Q 也是除了一个常数因子外是唯一确定的.

注 3　一般, 这样定义的 Riemann 对称空间 G/K 有群 G 作用在上面, 但 G 在其上的作用不一定是有效的. 但若稍加改变, 可以找到一个群在 G/K 上的作用是有效的. 令

$$N = \{g \in G | \tau(g) = \mathrm{id}_{G/K}\}.$$

则 N 为 K 中的 G 的最大的正规子群. 这时商群 G/N 可递地作用于 G/K 上, 而且作用有效. 又由

$$\beta(gN) = \tau(g), \quad \forall g \in G$$

所定义的从 G/N 到 $I(G/K)$ 中的映射 β 是一一的保持群的运算, β 是 G/N 与 $I(G/K)$ 的一个闭子群 G_1 的 Lie 群的同构映射.

下面说明 β 是连续的. 若有 G/N 中序列 $\{g_nN\}$ 收敛于 gN, 则 $\forall x \in G$ 有 $\{g_nxN\}$ 收敛于 gxN. 于是在 G/K 中有 $\{g_nxK\}$ 收敛于 gxK. 即有 $\{\tau(g_n)\}$ 收敛于 $\tau(g)$.

设 $K_1=\beta(K/N)$. 则 K_1 是 $o=\{K\}$ 的迷向子群 $\tilde{K}=\{k\in I(G/K)|k\cdot o=o\}$ 的紧子群. 令 $G_1=\beta(G/N)$. 由于 β 是一一的, 故可将 G/N 的解析结构移植到 G_1 上. 这样, G_1 是 G/K 的 Lie 变换群.

下面说明, 作为 Lie 群 G_1 也是 $I(G/K)$ 的 Lie 子群.

设 G_1 中有序列 $\{g_n\}$ 收敛于 $g\in I(G/K)$, 则有 G/K 中序列 $\{g_n\cdot o\}$ 收敛于 $g\cdot o=p$. G_1 在 G/K 上作用可递, 于是有 $g^*\in G_1$, 使得 $g^*\cdot o=p$. 在 G_1 中存在过 g^* 的局部截面, 即 G_1 的包含 g^* 的子流形 B^* 使得自然映射 $\pi(x)=x\cdot o$ $(x\in G_1)$ 在 B^* 上的限制, 即 $\pi|_{B^*}$ 是 B^* 到 $\pi(B^*)$ 的微分同胚, $\pi(B^*)$ 是 p 的一个开邻域. 当 n 充分大后, 有元素 $k_n\in K_1$ 使得 $g_nk_n\in B^*$. 于是 $\{g_nk_n\}$ 收敛于 g^*. 由 K_1 为紧子群, 故可假定 $\{k_n\}$ 在 K_1 中收敛. 由于嵌入映射 $B^*\to G_1$, $K_1\to G_1$ 是连续的. 故 $\{g_nk_n\}$ 与 $\{k_n\}$ 在 G_1 中收敛, 从而 $\{g_n\}$ 在 G_1 中收敛. 故 G_1 到 $I(G/K)$ 中的嵌入映射是连续的. 从而 $g\in G_1$, 即 $G_1=\beta(G/N)$ 是 $I(G/K)$ 中闭子群. 由此可见, G_1 上有唯一的解析结构使得 G_1 是 $I(G/K)$ 的 Lie 子群. 注意到 Lie 群 $G_1=\beta(G/N)$ 与 $I(G/K)$ 的 Lie 子群 G_1 间的恒等映射是连续的, 因而是解析同构. 这样, 我们知道 β 是 G/N 与 $I(G/K)$ 的一个闭子群 G_1 的 Lie 群的同构映射.

注 4 无论 G 在 G/K 上的作用是否有效, G/K 的测地线也是 G 的单参数子群的轨道.

事实上, 设 $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{k}}$ 分别为 $I(G/K)$, $\tilde{K}$ 的 Lie 代数. 于是有 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的子空间 $\tilde{\mathfrak{p}}$ 使得 $\tilde{\mathfrak{g}}=\tilde{\mathfrak{k}}\dot{+}\tilde{\mathfrak{p}}$, 且

$$\tilde{\pi}(\exp X)=\mathrm{Exp}d\tilde{\pi}(X),\quad X\in\tilde{\mathfrak{p}},$$

这里 $\tilde{\pi}$ 是 $I(G/K)$ 到 G/K 的自然映射 $\tilde{\pi}(h)=h\cdot o$, $h\in I(G/K)$. 设 $\tilde{\sigma}$ 是 $I(G/K)$ 中相应的对合自同构. 即

$$\tilde{\sigma}(h)=s_ohs_o,\quad \forall h\in I(G/K).$$

又设 π_1 为 G 到 G/N 上的自然同态, 则有 $\beta\cdot\pi_1=\tau$, $\forall g\in G$,

$$\beta(\pi_1(\sigma(g)))=\tau(\sigma(g))=\tilde{\sigma}(\tau(g)).$$

故有 $d\beta d\pi_1 d\sigma=d\tilde{\sigma}d\tau$. 故 $d\beta d\pi_1$ 将 $\mathfrak{p}$ 映到 $\tilde{\mathfrak{p}}$ 上. 令 $\pi=\tilde{\pi}\cdot\beta\cdot\pi_1$, 则有

$$\pi(g)=\tilde{\pi}\cdot\beta\cdot\pi_1(g)=\tau(g)\cdot o=gK.$$

即 π 恰为 G 到 G/K 的自然映射. 故对 $\forall X\in\mathfrak{p}$, 有

$$\begin{aligned}&\pi(\exp X)=\tilde{\pi}(\beta(\pi_1(\exp X)))\\&=\tilde{\pi}(\exp d\beta(d\pi_1(X)))=\mathrm{Exp}(d\tilde{\pi}(d\beta(d\pi_1(X))))\\&=\mathrm{Exp}(d\pi(X)).\end{aligned}$$

由此可知 G/K 中测地线是 G 中一个单参数子群的轨道.

下面我们将 Riemann 对称对的条件换成相应的 Lie 代数上的条件就得到下面的概念.

定义 6.3.2　设 $\mathfrak{g}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数. $s \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 且 $s^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. 如果 s 的特征值 1 的特征子空间

$$\mathfrak{k} = E_1(s) = \{X \in \mathfrak{g} | s(X) = X\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的**紧致嵌入子代数**, 亦即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 对应的 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群是紧致的, 则称 $(\mathfrak{g}, s)$ 为**正交对称 Lie 代数**. 如果 $(\mathfrak{g}, s)$ 还满足

$$\mathfrak{k} \cap C(\mathfrak{g}) = \{0\},$$

则称 $(\mathfrak{g}, s)$ 为**有效正交对称 Lie 代数**. 又若 G 为连通 Lie 群, K 为 G 的 Lie 子群, 且 G, K 的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$, 则称 (G, K) 是结合于正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ 的对.

如果 (G, K) 是一个 Riemann 对称对. σ 为相应的对合自同构. 则 $(\mathfrak{g}, d\sigma)$ 为正交对称 Lie 代数, 而且 (G, K) 是结合于 $(\mathfrak{g}, d\sigma)$ 的对.

定理 6.3.2　设 $(\mathfrak{g}, s)$ 是正交对称 Lie 代数. $(\tilde{G}, \tilde{K})$ 是结合于 $(\mathfrak{g}, s)$ 的对, 且 $\tilde{G}$ 是单连通的, $\tilde{K}$ 是连通的. 则 $\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}$ 的闭子群, $(\tilde{G}, \tilde{K})$ 是一个 Riemann 对称对, $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是单连通的.

证　因为 $\tilde{G}$ 是单连通的, 故有 $\tilde{G}$ 的解析同态 $\sigma : \tilde{G} \to \tilde{G}$ 使得 $(d\sigma)_e = s$. 由 $s^2 = \mathrm{id}$, 于是 $\sigma^2 = \mathrm{id}$. 故 $\tilde{K}$ 是 $K_\sigma = \{g \in \tilde{G} | \sigma(g) = g\}$ 的单位连通分支, 从而 $\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}$ 的闭子群. $\mathrm{Ad}_{\tilde{G}}\tilde{K}$ 是紧子群. 故 $(\tilde{G}, \tilde{K})$ 是 Riemann 对称对.

下面我们来证明最后一个结论, 即 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 的单连通性. 设 $\tilde{\pi}$ 是 $\tilde{G}$ 到 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 的自然映射. 又设 $\gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 中一条曲线, 且 $\gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{\pi}(e)$. 于是在 $\tilde{G}$ 中存在一条连续曲线 $\tilde{\gamma}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 满足 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. 特别 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\pi}(e)$. 即 $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1) \in \tilde{K}$. 又由 $\tilde{K}$ 是连通的, 故有曲线连接 $\tilde{\gamma}(1)$ 与 $\tilde{\gamma}(0)$. 因而在 $\tilde{G}$ 中有闭曲线 $\tilde{\gamma}_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 使得 $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}_1(t)) = \gamma(t)$. 由 $\tilde{G}$ 单连通, 故 $\tilde{\gamma}_1(t)$ 同伦于一点. 因而 $\gamma(t)$ 也同伦于一点. 故 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是单连通的. □

注　如果 (G, K) 也是结合于 $(\mathfrak{g}, s)$ 的一个对, K 是连通的, 则 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 G/K 的通用覆盖流形.

事实上, 由 $\mathrm{Lie}\tilde{G} = \mathrm{Lie}G = \mathfrak{g}$, 故有 $\tilde{G}$ 到 G 上的覆盖映射 φ, 使得 $(d\varphi)_e = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. 令 $K_1 = \varphi^{-1}(K)$, 则由 $\mathrm{Lie}\tilde{K} = \mathrm{Lie}K = \mathfrak{k}$, 知 $\tilde{K}$ 是 K_1 的单位连通分支. 于是 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 是 $\tilde{G}/K_1$ 的覆盖空间. 又令 $\psi(g\tilde{K}) = \varphi(g)K, \quad \forall g \in \tilde{G}$, 则 $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ 是 G/K 的单连通的覆盖流形.

从这里可知 G/K 是局部对称的.

6.4 例

本节中我们将给出 Riemann 对称空间的一些具体的例子. 这些例子本身也是很重要的.

例 6.4.1 连通紧 Lie 群是 Riemann 对称空间.

设 G 是连通紧 Lie 群. 在直积 $G\times G$ 中定义对合自同构 σ 为

$$\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1),\quad \forall (g_1,g_2)\in G\times G.$$

σ 的定点集是

$$G^*=\{(g,g)|g\in G\}.$$

显然, G^* 与 G 同构, 故 G^* 为紧 Lie 群. 因而, $(G\times G,G^*)$ 是一个 Riemann 对称对.

我们建立 $G\times G/G^*$ 到 G 的映射 φ 为

$$\varphi((g_1,g_2)G^*)=g_1g_2^{-1},\quad \forall g_1,g_2\in G\times G.$$

如果 $(g_1,g_2)G^*=(h_1,h_2)G^*$, 则有 $g_1^{-1}h_1=g_2^{-1}h_2$, 因而 $g_1g_2^{-1}=h_1h_2^{-1}$. 反之, 若 $g_1g_2^{-1}=h_1h_2^{-1}$, 则有 $g_1^{-1}h_1=g_2^{-1}h_2$. 故

$$(g_1,g_2)G^*=(h_1,h_2)G^*.$$

即 φ 是一一映射. 又

$$\varphi((g,e)G^*)=g,\quad \forall g\in G,$$

故 φ 是满映射. 显然, φ 是解析的. 故 $G\times G/G^*$ 与 G 微分同胚. 因而 G 是一个 Riemann 对称空间.

$G\times G$ 中元素在 $G\times G/G^*$ 上的作用用记号 $\tau(g_1,g_2)$ 来表示. 即

$$\tau(g_1,g_2)((h_1,h_2)G^*)=(g_1h_1,g_2h_2)G^*.$$

$G\times G$ 自然作用于 $G\cong G\times G/G^*$ 上. (g_1,g_2) 在 G 上作用为

$$\varphi\cdot\tau(g_1,g_2)\cdot\varphi^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccc} G\times G/G^* & \xrightarrow{\tau(g_1,g_2)} & G\times G/G^* \\ \downarrow{\varphi} & & \downarrow{\varphi} \\ G & \xrightarrow{\varphi\tau(g_1,g_2)\varphi^{-1}} & G \end{array}$$

此时有

$$\varphi\cdot\tau(g_1,g_2)\cdot\varphi^{-1}=L_{g_1}R_{g_2{}^{-1}},$$

这里 L_g, R_g 分别表示由 g 决定的 G 的左平移和右平移.

事实上, $\forall g\in G$ 有

$$\begin{aligned}\varphi\cdot\tau(g_1,g_2)\cdot\varphi^{-1}(g)&=\varphi\cdot\tau(g_1,g_2)((g,e)G^*)\\&=\varphi((g_1g,g_2)G^*)=g_1gg_2^{-1}\\&=L_{g_1}R_{g_2^{-1}}(g).\end{aligned}$$

从这里可知, $G\times G/G^*$ 上的 $G\times G$ 不变 Riemann 结构, 换成 G 的 Riemann 结构应是 G 的左、右平移不变的, 即双不变的.

为简单起见, 我们仍将 $\varphi\cdot\tau(g_1,g_2)\cdot\varphi^{-1}$ 记为 $\tau(g_1,g_2)$, π 为 $G\times G$ 到 $G\times G/G^*$ 的自然映射. 所以 $\varphi\cdot\pi$ 为 $G\times G$ 到 G 的映射, 仍称之为自然映射, 以 π 记之, 即有

$$\pi(g_1,g_2)=g_1g_2^{-1}.$$

设 $x\in G$, 则在 x 处的中心对称 s_x 为

$$s_x(g)=xg^{-1}x,\quad \forall g\in G.$$

事实上, 设 $x=e$ 为 G 的单位元素. 则 s_e 满足

$$s_e\cdot\pi=\pi\cdot\sigma.$$

故对 $(g_1,g_2)\in G\times G$, 有

$$\begin{aligned}s_e\cdot\pi(g_1,g_2)&=\pi\cdot\sigma(g_1,g_2)=\pi(g_2,g_1),\\&=s_e(g_1g_2^{-1})=g_2g_1^{-1}=(g_1g_2^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

故有

$$s_e(g)=g^{-1},\quad \forall g\in G.$$

又 $x=\tau(x,e)e$, 则

$$s_x=\tau(x,e)s_e\tau(x^{-1},e)=L_xR_{e^{-1}}s_eL_{x^{-1}}R_{e^{-1}}=L_xs_eL_{x^{-1}}.$$

于是

$$s_x(g)=L_xs_eL_{x^{-1}}(g)=xg^{-1}x,\quad \forall g\in G.$$

下面我们考察对应的 Lie 代数的分解.

我们知道, 如果 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}G$, 则

$$\mathrm{Lie}(G\times G)=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}=\{(x,y)|x,y\in\mathfrak{g}\}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,$$

这里 $\oplus$ 表示理想直和, 而

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_1 &= \{(x,0)|x\in\mathfrak{g}\},\\ \mathfrak{g}_2 &= \{(0,y)|y\in\mathfrak{g}\},\\ \mathfrak{g}_1 &\cong \mathfrak{g}_2\cong\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

令

$$\mathfrak{k}=E_1(d\sigma),\quad \mathfrak{p}=E_{-1}(d\sigma).$$

由 $\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1)$, 故

$$d\sigma(x,y)=(y,x),\quad \forall(x,y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}&=\{(x,x)|x\in\mathfrak{g}\}\cong\mathfrak{g},\\ \mathfrak{p}&=\{(x,-x)|x\in\mathfrak{g}\},\\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}&=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}.\end{aligned}$$

由 $\pi(g_1,g_2)=g_1g_2^{-1}$, 知

$$d\pi(x,y)=x-y.$$

因而 $\mathfrak{p}$ 作为线性空间与 $\mathfrak{g}$ 是同构的.

最后, 我们讨论 Riemann 对称空间 G 的指数映射 Exp 与 Lie 群 G 的指数映射 exp 之间的关系.

设 $\exp^*$ 是 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 到 $G\times G$ 的指数映射. 于是有

$$\exp^*(x,-x)=(\exp x,\exp(-x)).$$

因而, 再由

$$\pi(\exp^*(x,-x))=\mathrm{Exp}(d\pi(x,-x)),$$

即

$$(\exp x)(\exp(-x))^{-1}=\mathrm{Exp}2x,$$

$$\exp 2x=\mathrm{Exp}2x,$$

可得

$$\exp=\mathrm{Exp}.$$

这样, 我们知道连通紧 Lie 群作为 Riemann 对称空间, 其测地线就是 G 的单参数子群.

例 6.4.2 设 $G = SO(n+1)$ 是 $n+1$ 阶的幺模正交矩阵群. 自然, 这是一个连通的紧 Lie 群. 令

$$S = I_{1n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

这里 I_n 为 n 阶单位矩阵. 作 $SO(n+1)$ 到 $SO(n+1)$ 的映射 σ 如下:

$$\sigma(A) = SAS^{-1}.$$

显然 $\sigma \in \mathrm{Aut}SO(n+1)$, 且 $\sigma^2 = \mathrm{id}$, σ 的不动点集为

$$K_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} \det B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in O(n) \right\}.$$

因而其单位连通分支为

$$(K_\sigma)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SO(n) \right\} \cong SO(n).$$

这样 $SO(n+1)/SO(n)$, $SO(n+1)/K_\sigma$ 都是 Riemann 对称空间.

$SO(n+1)/SO(n)$ 到 S^n 中映射 φ,

$$\varphi(\pi(A)) = \mathrm{col}_1(A)$$

是同胚映射. 即 S^n 为 Riemann 对称空间. 我们可以用 S^n 来代替 $SO(n+1)/SO(n)$.

例 6.4.3 $G = SO(n+1), \sigma$ 如例 6.4.2 所定义. 现在我们来看 Riemann 对称空间 G/K_σ 的几何背景, 其中 K_σ 也是例 6.4.2 中所得到的, 即

$$K_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} \det B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in O(n) \right\}.$$

$SO(n+1)/K_\sigma$ 实际上是**实射影空间**.

例 6.4.4 设 $S = \mathrm{diag}(-1, I_n)$. 令

$$O(1,n) = \{A \in GL(n+1, \mathbf{R}) | A'SA = S\}$$

(当 $n=3$ 时, $O(1,3)$ 为通常的 Lorentz 群). $O(1,n)$ 有四个连通分支, 单位连通分支为

$$G = \{A \in O(1,n) | \det A = 1, \mathrm{ent}_{11}(A) \geqslant 1\}.$$

在 G 中作对合自同构 σ 如下:

$$\sigma(A) = SAS, \quad \forall A \in G.$$

容易得到 σ 的不动点集为

$$K_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SO(n) \right\}.$$

因而 K_σ 是连通的. 于是

$$(K_\sigma)_0 = K_\sigma \approx SO(n).$$

$G/SO(n)$ 实际就是我们在例 6.1.1 所叙述的双曲空间 H_1^n.

G 的 Lie 代数, 即 $O(1,n)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{so}(1,n) = \{X \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)} | XS + SX' = 0\}.$$

由 G 的对合自同构 σ 诱导 $\mathfrak{so}(1,n)$ 的对合自同构 $d\sigma$ 为

$$d\sigma(X) = SXS.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{so}(1,n) | d\sigma(X) = X\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \middle| Y + Y' = 0 \right\} \\
&\approx \mathfrak{so}(n), \\
\mathfrak{p} &= \{X \in \mathfrak{so}(1,n) | d\sigma(X) = -X\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_1' \\ X_1 & 0 \end{pmatrix} \middle| X_1 \in \mathbf{R}^n \right\} \\
&\approx \mathbf{R}^n.
\end{aligned}$$

例 6.4.5 设 $G = SU(n+1)$, 即为 $n+1$ 阶幺模酉群. $S = \mathrm{diag}(-1, I_n)$. 在 G 中定义 σ 为:

$$\sigma(A) = SAS, \quad \forall A \in SU(n+1).$$

于是 σ 的不动点集为

$$K_\sigma = \{\mathrm{diag}(\overline{\det U}, U) | U \in U(n)\} \approx U(n).$$

这样 $SU(n+1)/U(n)$ 为 Riemann 对称空间.

$SU(n+1)/U(n)$ 可与 $\mathbf{PC}^n$ 等同, 即 $SU(n+1)/U(n)$ 就是复射影空间.

$SU(n+1)$ 的 Lie 代数为

$$\mathfrak{su}(n+1) = \{X \in \mathbf{C}^{(n+1)\times(n+1)} | \bar{X}' + X = 0, \mathrm{tr}X = 0\}.$$

σ 在 $\mathfrak{su}(n+1)$ 上诱导的对合自同构 $d\sigma$ 为

$$d\sigma(X) = SXS, \quad \forall X \in \mathfrak{su}(n+1).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{X \in \mathfrak{su}(n+1) | d\sigma(X) = X\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} -\mathrm{tr} Y & 0 \\ 0 & Y \end{array} \right) \middle| Y \in \mathfrak{u}(n) \right\} \\ &\approx \mathfrak{u}(n), \\ \mathfrak{p} &= \{X \in \mathfrak{su}(n+1) | d\sigma(X) = -X\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & -\bar{X}' \\ X & 0 \end{array} \right) \middle| X \in \mathbf{C}^n \right\}.\end{aligned}$$

例 6.4.6 设 $G = SO(p+q)$, 即为 $p+q$ 阶特殊正交群. $J_{p,q} = \mathrm{diag}(-I_p, I_q)$. 在 G 中定义 σ 为

$$\sigma(A) = J_{pq} A J_{pq}, \quad \forall A \in G.$$

显然

$$\sigma^2 = id.$$

于是

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} A_1 \in O(p), A_2 \in O(q), \\ \det A_1 = \det A_2 \end{array} \right\}, \\ (K_\sigma)_0 &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array} \right) \middle| A_1 \in SO(p), A_2 \in SO(q) \right\}, \\ K_\sigma &= (K_\sigma)_0 \cup \left\{ \left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} A_1 \in O(p), A_2 \in O(q), \\ \det A_1 = \det A_2 = -1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

因而由 G, σ 可以得到两个对称空间:

$$G/(K_\sigma)_0, \quad G/K_\sigma.$$

显然映射 $g(K_\sigma)_0 \to gK_\sigma$ 是 $G/(K_\sigma)_0 \to G/K_\sigma$ 的二重覆盖映射.

$SO(p+q)/K$ 为 Grassmann 流形或定向 Grassmann 流形.

$SO(p+q)/K$ 对应的正交对称 Lie 代数 $\{\mathfrak{so}(p+q), d\sigma\}$, 其中

$$d\sigma(X) = J_{pq} X J_{pq}, \quad X + X' = 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}E_1(d\sigma)=&\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{so}(p+q)|d\sigma(X)=X\}\\=&\left\{\left(\begin{array}{cc}X_{11}&0\\0&X_{22}\end{array}\right)\middle|X_{11}'+X_{11}=0,X_{22}'+X_{22}=0\right\}\\\approx&\mathfrak{so}(p)+\mathfrak{so}(q),\\E_{-1}(d\sigma)=&\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{so}(p+q)|d\sigma(X)=-X\}\\=&\left\{\left(\begin{array}{cc}0&-X_{21}'\\X_{21}&0\end{array}\right)\middle|X_{21}\in\mathbf{R}^{q\times p}\right\}.\end{aligned}$$

在 $p=1$ 时, 就是例 6.4.2 与例 6.4.3 的情况.

6.5 实半单 Lie 代数

Riemann 对称空间由某个 Lie 群及其对合自同构所确定. Lie 群的问题研究很大程度上归结为 Lie 代数问题的研究. 下面三节讨论与 Riemann 对称空间密切相关的 Lie 代数的问题.

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数 (称 $\mathfrak{g}$ 为实 Lie 代数). 令

$$\mathfrak{g}^c=\{X+\sqrt{-1}Y|X,Y\in\mathfrak{g}\}\approx\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathfrak{g}.$$

在 $\mathfrak{g}^c$ 中定义加法、复数与 $\mathfrak{g}^c$ 中元素的乘法和括积分别为

$$\begin{aligned}(X_1+\sqrt{-1}Y_1)+(X_2+\sqrt{-1}Y_2)=&(X_1+X_2)+\sqrt{-1}(Y_1+Y_2),\\(a+\sqrt{-1}b)(X+\sqrt{-1}Y)=&(aX-bY)+\sqrt{-1}(aY+bX),\\[X_1+\sqrt{-1}Y_1,X_2+\sqrt{-1}Y_2]=&[X_1,X_2]-[Y_1,Y_2]+\sqrt{-1}([Y_1,X_2]+[X_1,Y_2]),\\&\forall a,b\in\mathbf{R};\quad X,Y,X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\mathfrak{g},\end{aligned}$$

易证 $\mathfrak{g}^c$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 Lie 代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**复化**, 而 $\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}^c$ 的一个**实形式**.

在实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^c$ 中定义变换 τ 如下:

$$\tau(X+\sqrt{-1}Y)=X-\sqrt{-1}Y,\quad X,Y\in\mathfrak{g}.$$

称 τ 为 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}$ 的**共轭**.

显然, τ 有下列性质:

1) $\tau(X+Y)=\tau(X)+\tau(Y),X,Y\in\mathfrak{g}^c$;

2) $\tau(\alpha X)=\bar{\alpha}\tau(X),\alpha\in\mathbf{C},\mathbf{X}\in\mathfrak{g}^{\mathbf{c}}$;

3) $\tau([X,Y])=[\tau(X),\tau(Y)], X,Y\in\mathfrak{g}^c$;

4) $\tau^2=id_{\mathfrak{g}^c}$.

除此之外, 还有

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{g}^c|\tau(X)=X\}.$$

在一个复 Lie 代数中, 若有变换 σ 也满足上述性质 1) ~ 4), 则称此变换 σ 为一个**半对合**. 半对合 σ 的不动点集是一个实 Lie 代数而且是此复 Lie 代数的一个实形式.

设 $\mathfrak{g}^c$ 是实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化, 则有 $\mathfrak{g}^c$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}$ 上的限制恰为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 由此不难得到 $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}^c$ 半单.

一般而言, 一个复 Lie 代数不一定有实形式. 但是, 复半单 Lie 代数一定有实形式. 当然一个复半单 Lie 代数的实形式彼此之间未必是同构的. 复半单 Lie 代数中一个重要的结果是, 在同构的意义下, 任何复半单 Lie 代数有唯一的紧致实形式. 我们知道, 一个实 Lie 代数是紧致半单的, 当且仅当其 Killing 型是负定的. 这些事实的详细论述可参看文献 [4], [5], [14] 等.

让我们回到一般的实半单 Lie 代数上来.

定理 6.5.1 设 $\mathfrak{g}^c$ 是实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化. $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}^c$ 的紧致实形式. τ, σ 分别为 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0$ 的共轭. 则

1) 下面四个条件等价:

(i) $\tau\sigma=\sigma\tau$;

(ii) $(\tau\sigma)^2=\mathrm{id}$;

(iii) $\sigma(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$;

(iv) $\tau(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}_0$;

2) 在满足 1) 中条件时, $\theta=\tau\sigma=\sigma\tau$ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的对合自同构 (即 $\theta^2=\mathrm{id}$), 且 θ 在 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0$ 上的限制 (仍记为 θ) 也是 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0$ 的对合自同构, 且有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p},\quad \mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\dot{+}\sqrt{-1}\mathfrak{p},$$

其中 $\mathfrak{k}=E_1(\mathfrak{g},\theta)$, $\mathfrak{p}=E_{-1}(\mathfrak{g},\theta)$.

证 1) (i)$\Longrightarrow$(ii) 这是由于 $\tau^2=\sigma^2=\mathrm{id}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 设 $X\in\mathfrak{g}$, 于是

$$\begin{aligned}\tau(\sigma(X))&=\tau\sigma(\tau(X))=\tau\sigma\tau(\sigma^2(X))\\&=(\tau\sigma)^2(\sigma(X))=\sigma(X).\end{aligned}$$

故 $\sigma(X)\in\mathfrak{g}$, 故 $\sigma(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 设 $Y\in\mathfrak{g}_0$, 有 $X_1,X_2\in\mathfrak{g}$ 使得

$$Y=X_1+\sqrt{-1}X_2.$$

由 $Y \in \mathfrak{g}_0$, 于是有

$$\sigma(Y) = \sigma(X_1) - \sqrt{-1}\sigma(X_2) = X_1 + \sqrt{-1}X_2.$$

由 (iii) 知 $\sigma(X_1), \sigma(X_2) \in \mathfrak{g}$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma\tau(Y) &= \sigma(X_1 - iX_2) = \sigma(X_1) + i\sigma(X_2)\\ &= \tau\sigma(X_1) + i\tau\sigma(X_2) = \tau(\sigma(X_1) - i\sigma(X_2))\\ &= \tau(Y).\end{aligned}$$

即 $\tau(Y) \in \mathfrak{g}_0$, 故 $\tau(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$.

(iv)$\Longrightarrow$(i) 设 $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, 于是 $\tau(X), \tau(Y) \in \mathfrak{g}_0$. 因而有

$$\begin{aligned}\sigma\tau(X + \sqrt{-1}Y) &= \sigma(\tau(X) - \sqrt{-1}\tau(Y))\\ &= \tau(X) + \sqrt{-1}\tau(Y) = \tau(\sigma(X)) + \sqrt{-1}\tau(\sigma(Y))\\ &= \tau\sigma(X + \sqrt{-1}Y).\end{aligned}$$

因而 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

2) θ 为 $\mathfrak{g}^c$ 的对合自同构是显然的. 由 1) 中 (iii),(iv) 知 $\theta(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\theta(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. 故 θ 在 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制分别为 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_0$ 的对合自同构. 于是

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= E_1(\mathfrak{g}, \theta) \dot{+} E_{-1}(\mathfrak{g}, \theta),\\ \mathfrak{g}_0 &= E_1(\mathfrak{g}_0, \theta) \dot{+} E_{-1}(\mathfrak{g}_0, \theta).\end{aligned}$$

设 $X \in E_1(\mathfrak{g}, \theta)$, 即有 $\theta(X) = X, \tau(X) = X$. 因而

$$\sigma(X) = \sigma(\tau(X)) = \theta(X) = X.$$

故 $X \in \mathfrak{g}_0$, 且 $\theta(X) = X$, 于是 $X \in E_1(\mathfrak{g}_0, \theta)$.

反之, $Y \in E_1(\mathfrak{g}_0, \theta)$, 即 $\sigma(Y) = \theta(Y) = Y$. 因而

$$\tau(Y) = \tau(\sigma(Y)) = \theta(Y) = Y.$$

故 $Y \in \mathfrak{g}$, 则 $Y \in E_1(\mathfrak{g}, \theta)$, 故

$$E_1(\mathfrak{g}, \theta) = E_1(\mathfrak{g}_0, \theta) = \mathfrak{k}.$$

现设 $X_1 \in E_{-1}(\mathfrak{g}, \theta)$, 即有 $\theta(X_1) = -X_1 = -\tau(X_1)$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma(\sqrt{-1}X_1) &= -\sqrt{-1}\sigma(X_1) = -\sqrt{-1}\sigma(\tau(X_1))\\ &= -\sqrt{-1}\theta(X_1) = \sqrt{-1}X_1.\end{aligned}$$

故 $\sqrt{-1}X_1 \in \mathfrak{g}_0$, $\theta(\sqrt{-1}X_1) = -\sqrt{-1}X_1$, 因此 $\sqrt{-1}X_1 \in E_{-1}(\mathfrak{g}_0, \theta)$. 又由

$$\dim E_{-1}(\mathfrak{g}, \theta) = \dim E_{-1}(\mathfrak{g}_0, \theta),$$

因而有

$$E_{-1}(\mathfrak{g}_0, \theta) = \sqrt{-1}E_{-1}(\mathfrak{g}, \theta) = \sqrt{-1}\mathfrak{p}.$$

故定理成立. □

称实半单 Lie 代数的分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ 为 **Cartan 分解**, θ 在 $\mathfrak{g}$ 上的限制叫做 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 对合**.

定理 6.5.2 设 $\mathfrak{g}^c$ 是实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化. $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的紧致实形式. τ, σ 分别为 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0$ 的共轭, 且 $\tau\sigma = \sigma\tau$, 又 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0$ 对于 $\theta = \tau\sigma$ 有分解, 故

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}.$$

$\theta|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}$, $\theta|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{id}$. 则有

1) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$;

2) 设 B 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, 有

$$B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0,$$

B 在 $\mathfrak{k}$ 上负定, 在 $\mathfrak{p}$ 上正定, 因而 $\mathfrak{k}$ 是紧致 Lie 代数.

证 1) 设 $X_1, X_2 \in \mathfrak{p}$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{k}$, 于是

$$\begin{aligned} \theta([Y_1, Y_2]) &= [\theta Y_1, \theta Y_2] = [Y_1, Y_2], \\ \theta([Y_1, X_1]) &= [\theta Y_1, \theta X_1] = -[Y_1, X_1], \\ \theta([X_1, X_2]) &= [\theta X_1, \theta X_2] = [X_1, X_2]. \end{aligned}$$

因而 1) 成立.

2) 设 $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$. 于是

$$B(\theta X, \theta Y) = B(X, -Y) = -B(X, Y).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} B(\theta X, \theta Y) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\theta X \mathrm{ad}\theta Y) \\ &= \mathrm{tr}(\theta \mathrm{ad} X \theta^{-1} \cdot \theta \mathrm{ad} Y \theta^{-1}) = \mathrm{tr}(\theta \mathrm{ad} X \mathrm{ad} Y \theta^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad} X \mathrm{ad} Y) \\ &= B(X, Y). \end{aligned}$$

因而有 $B(X, Y) = 0$.

由于 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型都是 $\mathfrak{g}^c$ 的 Killing 型的限制, 故我们都用 B 来表示. 由 $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p})=0$, 知 $B(\mathfrak{k},\sqrt{-1}\mathfrak{p})=0$. 而 B 在 $\mathfrak{g}_0$ 上是负定的. 于是, B 在 $\mathfrak{k}$ 上负定, 在 $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ 上也负定. 因而 B 在 $\mathfrak{p}$ 上正定.

令 $G_0=\exp\operatorname{ad}\mathfrak{g}_0$, 即 G_0 是 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构群. 由 $\mathfrak{g}_0$ 是紧半单的, 故 G_0 是连通的紧半单 Lie 群. 又由于 $\theta\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0\supseteq G_0$, 因而 $C_{\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0}(\theta)$ 为 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的紧子群. 而 $\operatorname{Lie}C_{\operatorname{Aut}\mathfrak{g}_0}(\theta)=\mathfrak{k}$. 故 $\mathfrak{k}$ 是紧 Lie 代数. □

定理 6.5.2 的逆定理也是正确的, 即若实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 有分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p},$$

其中 $\mathfrak{k}$ 是紧子代数, 满足

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p},\quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{k},$$

B 在 $\mathfrak{k}$ 上负定, 在 $\mathfrak{p}$ 上正定, 则

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\dot{+}\sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

是紧半单 Lie 代数. $\mathfrak{g}^c=\mathfrak{g}_0^c$ 对 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ 的共轭 τ, σ 满足 $\tau\sigma=\sigma\tau$.

定理 6.5.3 *设 $\mathfrak{g}$ 是一个实半单 Lie 代数, 其复化 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}$ 的共轭为 τ. 则有 $\mathfrak{g}^c$ 的紧致实形式 $\mathfrak{g}_0$ 使得 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭 σ 满足 $\tau\sigma=\sigma\tau$.*

由此可知, $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解存在.

证 设 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个紧致实形式. $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}_1$ 的共轭为 σ_1. B 为 $\mathfrak{g}^c$ 的 Killing 型. 令

$$(X,Y)=-B(X,\sigma_1 Y).$$

若 $X=X_1+\sqrt{-1}X_2\neq 0$, $X_1,X_2\in\mathfrak{g}_1$, 则有

$$\begin{aligned}(X,X)&=-B(X_1+\sqrt{-1}X_2,\sigma(X_1+\sqrt{-1}X_2))\\&=-B(X_1+\sqrt{-1}X_2,X_1-\sqrt{-1}X_2)\\&=-B(X_1,X_1)-B(X_2,X_2)>0.\end{aligned}$$

因而 (X,Y) 是 $\mathfrak{g}^c$ 上的正定 Hermite 型. 换句话说, $\mathfrak{g}^c$ 关于 (X,Y) 成为酉空间.

令 $\rho_1=\tau\sigma_1$, 则 $\rho\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^c$, 而且

$$\begin{aligned}(\rho_1X,Y)&=-B(\rho_1X,\sigma_1Y)=-B(X,\rho_1^{-1}\sigma_1Y)\\&=-B(X,\sigma_1\tau\sigma_1Y)=-B(X,\sigma_1(\rho_1Y))\\&=(X,\rho_1Y).\end{aligned}$$

故 ρ_1 是 $\mathfrak{g}^c$ 的 Hermite 线性变换. $\rho = \rho_1^2 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}^c$, 且为正定 Hermite 变换. 由此知, 在 $\mathfrak{g}^c$ 中有关于 (X, Y) 的标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 使得

$$M(\rho_1;\ X_1, X_2, \cdots, X_n) = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n), \quad \mu_i \in \mathbf{R};$$
$$M(\rho;\ X_1, X_2, \cdots, X_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad \lambda_j = \mu_j^2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

设

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k.$$

于是由

$$[\rho_1 X_i, \rho_1 X_j] = \rho_1 [X_i, X_j],$$

有

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_i \mu_j C_{ij}^k X_k = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \mu_k X_k,$$

即

$$\mu_i \mu_j C_{ij}^k = C_{ij}^k \mu_k.$$

如果 $C_{ij}^k = 0$, 上式是平凡的; 如果 $C_{ij}^k \neq 0$, 则 $\mu_i \mu_j = \mu_k$. 自然, $\forall t \in \mathbf{R}$, 均有

$$\lambda_i^t \lambda_j^t C_{ij}^k = C_{ij}^k \lambda_k^t.$$

于是 ρ^t 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}^c$ 的单参数子群.

$\mathfrak{g}_0 = \rho^{\frac{1}{4}}(\mathfrak{g}_1)$ 也是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}^c$ 的紧致实形式, 而且 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭为 $\sigma = \rho^{\frac{1}{4}} \sigma_1 \rho^{-\frac{1}{4}}$. 由于

$$\sigma_1 \rho_1 \sigma_1 = \sigma_1 (\tau \sigma_1) \sigma_1 = \sigma_1 \tau = \rho_1^{-1},$$

故

$$\sigma_1 \rho \sigma_1 = \rho^{-1}, \quad \sigma_1 \rho^t \sigma_1 = \rho^{-t}.$$

因而有

$$\tau\sigma = \tau \rho^{\frac{1}{4}} \sigma_1 \rho^{-\frac{1}{4}} = \tau \sigma_1 \rho^{-\frac{1}{2}} = \rho_1 \rho^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-\frac{1}{2}} \rho_1,$$
$$\sigma\tau = \rho^{\frac{1}{4}} \sigma_1 \rho^{-\frac{1}{4}} \tau = (\tau\sigma)^{-1} = \rho^{\frac{1}{2}} \rho_1^{-1},$$
$$M(\rho^{-\frac{1}{2}} \rho_1; X_1, X_2, \cdots, X_n) = \mathrm{diag}\left(\frac{\mu_1}{|\mu_1|}, \frac{\mu_2}{|\mu_2|}, \cdots, \frac{\mu_n}{|\mu_n|}\right),$$
$$M(\rho^{\frac{1}{2}} \rho_1^{-1}; X_1, X_2, \cdots, X_n) = \mathrm{diag}\left(\frac{|\mu_1|}{\mu_1}, \frac{|\mu_2|}{\mu_2}, \cdots, \frac{|\mu_n|}{\mu_n}\right).$$

则 $\tau\sigma = \sigma\tau$. 故 $\mathfrak{g}_0$ 为所要求的紧致实形式. □

定理 6.5.4 设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 有两个 Cartan 分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \dot{+} \mathfrak{p}_2,$$

则有 $\mathfrak{g}$ 的内自同构 φ 使得

$$\varphi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2, \quad \varphi(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2.$$

即 $\mathfrak{g}$ 的任何两个 Cartan 分解共轭.

证 令 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k}_2 \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}_2$, 则 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 都是 $\mathfrak{g}^c$ 的紧致实形式. 设 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的共轭分别为 τ, σ_1 与 σ_2, 则有

$$\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau, \quad \tau\sigma_2 = \sigma_2\tau;$$
$$\mathfrak{g} = \sigma_1(\mathfrak{g}) = \sigma_2(\mathfrak{g}).$$

令 $\rho = (\sigma_1\sigma_2)^2$, 则 ρ^t 是 $\mathfrak{g}^c$ 的自同构群的单参数子群, 且 $\sigma_2\rho^t\sigma_2 = \rho^{-t}$. 与定理 3.1.3 一样有

$$\sigma_1(\rho^{\frac{1}{4}}\sigma_2\rho^{-\frac{1}{4}}) = (\rho^{\frac{1}{4}}\sigma_2\rho^{-\frac{1}{4}})\sigma_1.$$

即有 $\sigma_1(\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2) = \rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2$. 由定理 3.1.1 知, 有

$$\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 = (\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_1) \dot{+} (\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{g}_1).$$

$\mathfrak{g}^c$ 的 Killing 型在 $\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 \cap \sqrt{-1}\mathfrak{g}_1$ 上的限制为正定. 但 B 在 $\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2$ 上的限制为负定. 于是

$$\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 \cap \sqrt{-1}\mathfrak{g}_1 = \{0\}.$$

故有

$$\rho^{\frac{1}{4}}\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1.$$

又由 $\mathfrak{g} = \sigma_1(\mathfrak{g}) = \sigma_2(\mathfrak{g})$, 因而 $\rho^t(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. 故

$$\rho^{\frac{1}{4}}(\mathfrak{k}_2 \dot{+} \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \mathfrak{p}_1,$$

$$\rho^{\frac{1}{4}}(\mathfrak{k}_2 \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{k}_1 \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}_1.$$

于是

$$\rho^{\frac{1}{4}}(\mathfrak{k}_2) = \mathfrak{k}_1,$$

$$\rho^{\frac{1}{4}}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1.$$

因而 $\varphi = \rho^{-\frac{1}{4}}$ 是所要求的 $\mathfrak{g}$ 的内自同构. □

其实我们在这里已经证明了一个复半单 Lie 代数的紧致实形式在同构意义下是唯一的.

定理 6.5.5　设 $\mathfrak{g}_0$ 是一个紧半单 Lie 代数. θ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一对合自同构. 又 $\mathfrak{g}_0$ 的复化 $\mathfrak{g}_0^c$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭为 σ, 则有

1) 将 θ 以自然方式开拓为 $\mathfrak{g}_0^c$ 的对合自同构, $\tau = \sigma\theta = \theta\sigma$ 为 $\mathfrak{g}_0^c$ 的一个半对合;

2) τ 的不动点集

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_0^c | \tau(X) = X\}$$

是 $\mathfrak{g}_0^c$ 的一个实形式;

3) $\mathfrak{g}$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g} = E_1(\mathfrak{g}_0, \theta) \dot{+} iE_{-1}(\mathfrak{g}_0, \theta).$$

这个定理的证明是很容易的, 故略去. □

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单 Lie 代数. $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形式. 于是有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$$

如果我们将 $\mathfrak{g}$ 的数乘 (即 $\mathbf{C}$ 中元素与 $\mathfrak{g}$ 中元素的乘法) 限制为实数与 $\mathfrak{g}$ 中元素的乘法, 则易知 $\mathfrak{g}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数, 且其维数为复数域 $\mathbf{C}$ 上 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的维数的二倍. 这个实 Lie 代数记为 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$. 显然, 由关系

$$J(X) = \sqrt{-1}X, \quad X \in \mathfrak{g}$$

定义的 J 是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的一个线性变换, 且满足

$$J^2 = -\mathrm{id},$$
$$[J(X), Y] = [X, J(Y)] = J([X, Y]).$$

称 J 是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的一个**复结构**.

为避免将 $\mathfrak{g}$(复 Lie 代数) 与 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$(实 Lie 代数) 混淆, 我们在 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 中记 $\sqrt{-1}X$ 为 JX. 于是

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} J\mathfrak{g}_0$$

是一个子空间的直和分解.

定理 6.5.6　设 $\mathfrak{g}_0$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个紧致实形式. 则

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{g}_0 \dot{+} J\mathfrak{g}_0$$

为实 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的 Cartan 分解.

证　首先在 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 中定义变换 θ 如下:

$$\theta(X + JY) = X - JY, \quad X, Y \in \mathfrak{g}_0.$$

显然, θ 是线性的. 又 $\theta^2 = \mathrm{id}$, 且

$$\begin{aligned}&[\theta(X_1 + JY_1), \theta(X_2 + JY_2)]\\=&[X_1 - JY_1, X_2 - JY_2]\\=&[X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] - J([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2])\\=&\theta([X_1 + JY_1, X_2 + JY_2]).\end{aligned}$$

故 θ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的对合自同构, 也是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^c$ 的自同构.

设 τ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^c$ 关于 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的共轭. 设 $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, 有

$$\begin{aligned}\theta\tau(X + JY) &= \tau\theta(X + JY)\\&= X - JY,\\\tau\theta(\sqrt{-1}(X + JY)) &= -\sqrt{-1}(X - JY)\\&= \theta(-\sqrt{-1}(X + JY))\\&= \theta\tau(\sqrt{-1}(X + JY)).\end{aligned}$$

于是 $\theta\tau = \tau\theta = \sigma$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}^c$ 的半对合. 显然

$$\begin{aligned}\sigma(X) = \theta\tau(X) = X,\\\sigma(\sqrt{-1}JX) = \theta\tau(\sqrt{-1}JX) = \sqrt{-1}JX, \quad X \in \mathfrak{g}_0.\end{aligned}$$

而

$$\dim_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g}_0 + \sqrt{-1}J\mathfrak{g}_0) = \dim_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g}_0 + J\mathfrak{g}_0),$$

故

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_0 + \sqrt{-1}J\mathfrak{g}_0$$

是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个实形式. 令

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_1 = \{X + \sqrt{-1}JX | X \in \mathfrak{g}_0\},\\\mathfrak{g}_2 = \{X - \sqrt{-1}JX | X \in \mathfrak{g}_0\}.\end{aligned}$$

显然,

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2.$$

又设 $Y \in \mathfrak{g}_0$, 则有

$$\begin{aligned}&[Y, X \pm \sqrt{-1}JX] = [Y, X] \pm \sqrt{-1}J[Y, X],\\&[\sqrt{-1}JY, X \pm \sqrt{-1}JX] = \pm[Y, X] + \sqrt{-1}J[Y, X].\end{aligned}$$

因而 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 都是 $\mathfrak{g}_u$ 的理想. 而

$$\theta(X+\sqrt{-1}JX)=X-\sqrt{-1}JX,$$

故 $\theta(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$. 再令 φ 为 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_0$ 的映射:

$$\varphi(X+\sqrt{-1}JX)=2X.$$

显然, φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_0$ 的线性同构映射, 且

$$\begin{aligned}&\varphi([X+\sqrt{-1}JX, Y+\sqrt{-1}JY])\\=&\varphi(2[X,Y]+2\sqrt{-1}J[X,Y])\\=&4[X,Y]\\=&[\varphi(X+\sqrt{-1}JX),\varphi(Y+\sqrt{-1}JY)].\end{aligned}$$

因而 φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_0$ 的 Lie 代数的同构. 故 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 都是紧半单 Lie 代数, $\mathfrak{g}_u$ 也是紧半单 Lie 代数. 于是

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}=\mathfrak{g}_0\dot{+}J\mathfrak{g}_0$$

是 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ 的 Cartan 分解. □

6.6　正交对称 Lie 代数

由前面的讨论知道, 一个 Riemann 对称空间实际上是一个 Riemann 对称对 (G,K). 而 Riemann 对称对与正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},s)$ 密切相关. 我们先回忆一下正交对称 Lie 代数的定义并推导出它的一些简单性质, 尔后进一步探讨它与 Riemann 对称空间的联系.

设 s 是实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. $\mathfrak{k}=E_1(s)$, $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k})$ 是 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的紧子群, 则称 $(\mathfrak{g},s)$ 是正交对称 Lie 代数. 又若 $C(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}=\{0\}$, 则称 $(\mathfrak{g},s)$ 是有效正交对称 Lie 代数.

定理 6.6.1　设 $(\mathfrak{g},s)$ 是正交对称 Lie 代数. $\mathfrak{p}$ 为 s 的属于 -1 的特征子空间. 即

$$\mathfrak{p}=E_{-1}(\mathfrak{g},s)=\{X\in\mathfrak{g}|s(X)=-X\}.$$

又设 $B(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则有

1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$;

2) $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subseteq\mathfrak{k}, [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{k}, [\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p}$;

3) $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p})=0$, $B(X,X)\leqslant 0, \forall X\in\mathfrak{k}$, 即 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是半负定的;

4) 又若 $(\mathfrak{g},s)$ 是有效的, 则 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的.

证 1) 是很明显的.

2) 设 $X_i \in \mathfrak{k}, Y_i \in \mathfrak{p}, i=1,2$. 则有

$$\begin{aligned}
s([X_1,X_2]) &= [sX_1,sX_2]=[X_1,X_2],\\
s([Y_1,Y_2]) &= [sY_1,sY_2]=[-Y_1,-Y_2]=[Y_1,Y_2],\\
s([X_1,Y_1]) &= [sX_1,sY_1]=[X_1,-Y_1]=-[X_1,Y_1].
\end{aligned}$$

故有 $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subseteq\mathfrak{k},[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{k},[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p}$.

3) $X\in\mathfrak{k}, Y\in\mathfrak{p}$, 于是有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y)\mathfrak{k} &\subseteq (\mathrm{ad}X)\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p},\\
(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y)\mathfrak{p} &\subseteq (\mathrm{ad}X)\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{k}.
\end{aligned}$$

因而

$$B(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y)=0.$$

又因为 $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k})$ 是紧 Lie 群, 且作用在线性空间 $\mathfrak{g}$ 上, 于是有 $\mathfrak{g}$ 上的正定对称双线性函数 $Q(X,Y)$ 在 $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k})$ 下不变. 可视 Q 为 $\mathfrak{g}$ 上的内积. 由 $X\in\mathfrak{k}, Y,Z\in\mathfrak{g}$, 知 $\forall t\in\mathbf{R}$ 有

$$Q(e^{t\mathrm{ad}X}Y,e^{t\mathrm{ad}X}Z)=Q(Y,Z).$$

因而

$$Q(\mathrm{ad}X(Y),Z)+Q(Y,\mathrm{ad}X(Z))=0,$$

即 $\mathrm{ad}X$ 是 $\mathfrak{g}$ 的反对称变换. 故在 $\mathfrak{g}$ 的标准正交基下 $\mathrm{ad}X$ 的矩阵为斜对称矩阵. 故

$$B(X,X)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X)\leqslant 0,$$

即 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是半负定的.

4) 从 3) 的证明知, $X\in\mathfrak{k}$, 而

$$B(X,X)=0,$$

当且仅当 $\mathrm{ad}X=0$, 即 $X\in C(\mathfrak{g})$.

故当 $C(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}=\{0\}$ 时, B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的. □

定理 6.6.2 设 (G,K) 是一个 Riemann 对称对. $\mathfrak{g},\mathfrak{k}$ 分别为 G, K 的 Lie 代数. 如果 $C(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}=\{0\}$, 则有唯一的 G 的对合自同构 σ, 使得

$$(K_\sigma)_0\subseteq K\subseteq K_\sigma.$$

证　设 σ_1, σ_2 是具有上述性质的 G 的对合自同构, 即有

$$(K_{\sigma_i})_0 \subseteq K \subseteq K_{\sigma_i}.$$

于是, $\mathfrak{g}$ 有分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}_i, \quad i = 1, 2,$$

其中

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} | d\sigma_1(X) = d\sigma_2(X) = X\},$$
$$\mathfrak{p}_i = \{X \in \mathfrak{g} | d\sigma_i(X) = -X\}.$$

设 B 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则有

$$B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

设 $X_1 \in \mathfrak{p}_1$. 于是有 $X_2 \in \mathfrak{p}_2$, $T \in \mathfrak{k}$, 使得

$$X_1 = T + X_2.$$

$\forall Y \in \mathfrak{k}$, 有

$$B(T, Y) = B(X_1, Y) - B(X_2, Y) = 0.$$

由 $C(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k} = \{0\}$, 故 B 在 $\mathfrak{k}$ 上限制是负定的, 故 $T = 0$, 因而 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. 于是 $d\sigma_1 = d\sigma_2$. 故有

$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

即满足定理中条件的 σ 是唯一的. □

例 6.6.1　设 $\mathfrak{g}$ 是紧半单 Lie 代数, s 为 $\mathfrak{g}$ 的任一对合自同构. 显然 $(\mathfrak{g}, s)$ 是有效正交 Lie 代数.

例 6.6.2　设 $\mathfrak{g}$ 是实半单 Lie 代数.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解. θ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合, 即

$$\theta(X + Y) = X - Y, \quad X \in \mathfrak{k}, \quad Y \in \mathfrak{p},$$

则 $(\mathfrak{g}, \theta)$ 为有效正交对称 Lie 代数.

例 6.6.3　设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathbf{R}$ 上 n 维向量空间. $\mathfrak{k}$ 是一般线性群 $GL(\mathfrak{p})$ 的一个紧子群的 Lie 代数. 故 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$ 的一个子代数. 令

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$$

为线性空间的直和. 在 $\mathfrak{g}$ 中定义换位运算为

$$
\begin{aligned}
[T_1+X_1,T_2+X_2] &= [T_1,T_2]+T_1X_2-T_2X_1\\
&= T_1T_2-T_2T_1+T_1X_2-T_2X_1,
\end{aligned}
$$

$$T_i\in\mathfrak{k},\quad X_i\in\mathfrak{p},\quad i=1,2,$$

则不难验证 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想. 在 $\mathfrak{g}$ 中定义变换 θ 如下:

$$\theta(T+X)=T-X,\quad T\in\mathfrak{k},\quad X\in\mathfrak{p}.$$

不难验证 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. $T\in\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})$, 即

$$[T,X]=TX=0,\quad \forall X\in\mathfrak{p},$$

故 $T=0$. 因而 $\mathfrak{k}\cap C(\mathfrak{g})=(0)$.

由此可知 $(\mathfrak{g},\theta)$ 是有效正交对合 Lie 代数, 而且 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中 Abel 理想.

由上面三个例子, 我们引进下面的定义.

定义 6.6.1　设 $(\mathfrak{g},s)$ 是有效正交对称 Lie 代数.

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$$

是 $\mathfrak{g}$ 对 s 的特征子空间的分解.

1)　如 $\mathfrak{g}$ 是紧半单 Lie 代数, 则称 $(\mathfrak{g},s)$ 为**紧型的**;

2)　如 $\mathfrak{g}$ 是非紧半单 Lie 代数, 且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解, 则称 $(\mathfrak{g},s)$ 为**非紧型的**;

3)　如 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想, 则称 $(\mathfrak{g},s)$ 为 **Euclid 型的**.

Riemann 对称对 (G,K) 及对应的 Riemann 对称空间 G/K 称为紧型、非紧型或 Euclid 型的, 如果 (G,K) 对应的有效正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},s)$ 为紧型、非紧型或 Euclid 型的.

定义 6.6.2　设 $(\mathfrak{g}_1,s_1)$,$(\mathfrak{g}_2,s_2)$ 是两个有效正交对称 Lie 代数. 若有 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的 Lie 代数的同构映射 φ, 使得

$$\varphi s_1=s_2\varphi,$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{g}_2\\
\downarrow{\scriptstyle s_1} & & \downarrow{\scriptstyle s_2}\\
\mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{g}_2
\end{array}
$$

则称 $(\mathfrak{g}_1,s_1)$ 与 $(\mathfrak{g}_2,s_2)$**同构**.

特别地, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_2=\mathfrak{g}$ 且 $s_1=s_2=s$. 若 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 使得

$$\varphi s=s\varphi,$$

则称 φ 是正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},s)$ 的**自同构**. $(\mathfrak{g},s)$ 的所有自同构的集合记为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},s)$.

显然, $\mathfrak{g}$ 的自同构 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},s)$ 当且仅当 $\varphi(\mathfrak{k})=\mathfrak{k}$, $\varphi(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}$ 当且仅当 $\varphi(\mathfrak{k})=\mathfrak{k}$.

以下假定 $(\mathfrak{g},s)$ 是有效正交对称 Lie 代数. 又 $B(X,Y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. $\mathfrak{g}$ 对 s 的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$. B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的. B 在 $\mathfrak{p}$ 上的限制 B_p 是 $\mathfrak{p}$ 上的对称双线性函数. 另一方面, 由 $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p}$, 知 $\mathfrak{p}$ 在紧群 $\exp\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 下不变, 故 $\mathfrak{p}$ 有不变内积 (X,Y). 从而可视 $\mathfrak{p}$ 为在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 下不变的 Euclid 空间. 于是有 $\mathfrak{p}$ 的标准正交基 X_1, $X_2,\cdots,X_n$ 使得 $B_{\mathfrak{p}}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 即 $B_{\mathfrak{p}}(X_i,X_j)=B(X_i,X_j)=\delta_{ij}\beta_i$, $(X_i,X_j)=\delta_{ij}$.

令 $\mathfrak{p}_0=L(\{X_i|B(X_i,X_i)=\beta_i=0\})$, $\mathfrak{p}_+=L(\{X_i|B(X_i,X_i)=\beta_i>0\})$, $\mathfrak{p}_-=L(\{X_i|B(X_i,X_i)=\beta_i<0\})$. 显然有 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\dot{+}\mathfrak{p}_+\dot{+}\mathfrak{p}_-$, $(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+)=(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_-)=(\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-)=0$, $B(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+)=B(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_-)=B(\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-)=0$.

引理 6.6.1 设 $(\mathfrak{g},s)$ 是有效正交对称 Lie 代数. $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_+$ 与 $\mathfrak{p}_-$ 如上所述. 则 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+$ 与 $\mathfrak{p}_-$ 均在 s 与 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 下不变.

证 由于 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-\subseteq\mathfrak{p}$, 故 $\mathfrak{p}$ 在 s 下不变. 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是前所述的 $\mathfrak{p}$ 的标准正交基. 在 $\mathfrak{p}$ 中定义线性变换 $\mathcal{B}$ 如下:

$$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum a_i\beta_iX_i.$$

于是 $\mathcal{B}$ 在基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 下的矩阵 $M(\mathcal{B};X_1,X_2,\cdots,X_n)=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 因而有 $B(X,Y)=(\mathcal{B}(X),Y),\forall X,Y\in\mathfrak{p}$. 现设 $T\in\mathfrak{k},X\in\mathfrak{p}$, 则有

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}([T,X]),X_i)&=B([T,X],X_i)=-B(X,[T,X_i])\\&=-(\mathcal{B}(X),[T,X_i])=([T,\mathcal{B}(X)],X_i).\end{aligned}$$

因而 $\mathcal{B}\cdot\mathrm{ad}T|_{\mathfrak{p}}=\mathrm{ad}T|_{\mathfrak{p}}\cdot\mathcal{B}$. 由此可知, $\mathrm{ad}T(E_{\beta_i}(\mathcal{B}))\subseteq E_{\beta_i}(\mathcal{B})$, $\forall T\in\mathfrak{k}$, 这里, $E_{\beta_i}(\mathcal{B})=\{X\in\mathfrak{p}|\mathcal{B}(X)=\beta_iX\}$. 又 $\mathfrak{p}_+=\sum\limits_{\beta_i>0}E_{\beta_i}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{p}_-=\sum\limits_{\beta_i<0}E_{\beta_i}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{p}_0=E_0(\mathcal{B})$. 故 $\mathrm{ad}T(\mathfrak{p}_+)\subseteq\mathfrak{p}_+$, $\mathrm{ad}T(\mathfrak{p}_-)\subseteq\mathfrak{p}_-$, $\mathrm{ad}T(\mathfrak{p}_0)\subseteq\mathfrak{p}_0$. 即 $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$ 在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k}$ 下不变. □

引理 6.6.2 子空间 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-$ 满足下列关系:

1) $\mathfrak{p}_0=\{X\in\mathfrak{g}|B(X,Y)=0,\forall Y\in\mathfrak{g}\}$;

2) $[\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}]=\{0\}$, $\mathfrak{p}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想;

3) $[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-]=\{0\}$.

证 1) 令 $\mathfrak{n}=\{X\in\mathfrak{g}|B(X,Y)=0,\forall Y\in\mathfrak{g}\}$. 于是 $s(\mathfrak{n})=\mathfrak{n}$. 故有 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{n}\cap\mathfrak{p}$. 由于 B 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是负定的, 故 $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{k}=\{0\}$, 从而 $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{p}$. 设 $X\in\mathfrak{n}$, 且有 $X_0\in\mathfrak{p}_0, X_-\in\mathfrak{p}_-, X_+\in\mathfrak{p}_+$ 使 $X=X_0+X_++X_-$, 故有 $B(X,X_+)=B(X_+,X_+)=0$. 又 B 在 $\mathfrak{p}_+$ 上的限制是正定的, 故 $X_+=0$. 同样, $B(X_-,X_-)=B(X,X_-)=0$. B 在 $\mathfrak{p}_-$ 上的限制是负定的, 故 $X_-=0$. 从而 $X=X_0\in\mathfrak{p}_0$. 另一方面,$B(\mathfrak{k},\mathfrak{p}_0)=0$. 又由 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-$ 的定义知 $B(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_0)=0$, $B(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_+)=0$, $B(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_-)=0$. 于是 $B(\mathfrak{g},\mathfrak{p}_0)=0$, 故 $\mathfrak{p}_0\subseteq\mathfrak{n}$, 因而 $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{n}$.

2) 设 $X\in\mathfrak{p}_0$, $Y\in\mathfrak{g}$, $Z\in\mathfrak{g}$. 于是 $B([X,Y],Z)=B(X,[Y,Z])=0$. 故知 $\mathfrak{p}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且有

$$[\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{p}\cap\mathfrak{k}=\{0\}.$$

因而 $[\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}]=\{0\}$. 特别地, $\mathfrak{p}_0$ 为 Abel 理想.

3) 设 $X_+\in\mathfrak{p}_+$, $X_-\in\mathfrak{p}_-$, $T\in\mathfrak{k}$. 又 $[T,X_+]\in\mathfrak{p}_+$, 因而 $B(T,[X_+,X_-])=B([T,X_+],X_-)=0$. 又 $[X_+,X_-]=0$, 故 $[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_-]=\{0\}$. □

引理 6.6.3 令

$$\mathfrak{k}_+=[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_+],\quad \mathfrak{k}_-=[\mathfrak{p}_-,\mathfrak{p}_-],$$
$$\mathfrak{k}_0=\{X\in\mathfrak{k}|B(X,\mathfrak{k}_++\mathfrak{k}_-)=0\}.$$

则 $\mathfrak{k}_+$, $\mathfrak{k}_-$ 与 $\mathfrak{k}_0$ 都是 $\mathfrak{k}$ 的理想, 它们对于 B 互相正交, 且 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_+\oplus\mathfrak{k}_-\oplus\mathfrak{k}_0$.

证 由 $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}_+]=[\mathfrak{k},[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_+]]\subseteq[\mathfrak{p}_+,[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_+]]\subseteq[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_+]=\mathfrak{k}_+$, 故 $\mathfrak{k}_+$ 为 $\mathfrak{k}$ 的理想. 同样, $\mathfrak{k}_-$ 为 $\mathfrak{k}$ 的理想. 又 $B([\mathfrak{k},\mathfrak{k}_0],\mathfrak{k}_++\mathfrak{k}_-)=B(\mathfrak{k}_0,[\mathfrak{k},\mathfrak{k}_++\mathfrak{k}_-])=B(\mathfrak{k}_0,\mathfrak{k}_++\mathfrak{k}_-)=0$, 故 $\mathfrak{k}_0$ 也是 $\mathfrak{k}$ 的理想.

设 $X_+,Y_+\in\mathfrak{p}_+$, $X_-,Y_-\in\mathfrak{p}_-$, 则

$$\begin{aligned}B([X_+,Y_+],[X_-,Y_-])&=B(X_+,[Y_+,[X_-,Y_-]])\\&=B(X_+,[X_-,[Y_+,Y_-]])+B(X_+,[[Y_+,X_-],Y_-])=0.\end{aligned}$$

故 $B(\mathfrak{k}_+,\mathfrak{k}_-)=0$. 又 B 在 $\mathfrak{k}$ 上是负定的, 故引理成立. □

引理 6.6.4 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_\pm,\mathfrak{k}_0,\mathfrak{k}_\pm$ 间有下面的交换关系:

1) $[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_-]=[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_+]=\{0\}$;

2) $[\mathfrak{k}_-,\mathfrak{p}_0]=[\mathfrak{k}_-,\mathfrak{p}_+]=\{0\}$;

3) $[\mathfrak{k}_+,\mathfrak{p}_0]=[\mathfrak{k}_+,\mathfrak{p}_-]=\{0\}$.

证 1) 设 $T\in\mathfrak{k}_0$, $X,Y\in\mathfrak{p}_+$, 则有 $B([T,X],Y)=B(T,[X,Y])=0$. 由于 $[T,X]\in\mathfrak{p}_+$, B 在 $\mathfrak{p}_+$ 上是正定的, 故 $[T,X]=0$. 即有 $[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_+]=\{0\}$. 同理, $[\mathfrak{k}_0,\mathfrak{p}_-]=\{0\}$.

2) 显然,

$$[\mathfrak{k}_-, \mathfrak{p}_0] = [[\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_-], \mathfrak{p}_0] \subseteq [[\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_0], \mathfrak{p}_-] = \{0\},$$
$$[\mathfrak{k}_-, \mathfrak{p}_+] = [[\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_-], \mathfrak{p}_+] \subseteq [[\mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_+], \mathfrak{p}_-] = \{0\}.$$

3) 可用与 2) 相同的办法证明. □

引理 6.6.5 设 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. 又 $\mathfrak{k}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的子代数, $i = 1, 2$, 则 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致嵌入子代数, 当且仅当 $\mathfrak{k}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的紧致嵌入子代数 $(i = 1, 2)$.

证 设 G_i 是以 $\mathfrak{g}_i$ 为 Lie 代数的单连通 Lie 群, 故 $G = G_1 \times G_2$ 为单连通 Lie 群, 且其 Lie 代数为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

又设 G_i 中对应 $\mathfrak{k}_i$ 的解析子群为 K_i, 则 $K = K_1 \times K_2$ 为 G 的解析子群. 设 G_i 的中心为 Z_i, 则 G 的中心 $Z = Z_1 \times Z_2$. 考虑映射

$$\varphi : (K_1/K_1 \cap Z_1) \times (K_2/K_2 \cap Z_2) \to K/K \cap Z,$$

其中 φ 定义为

$$\varphi(k_1(K_1 \cap Z_1), k_1(K_2 \cap Z_2)) = k_1 k_2 (K \cap Z).$$

易证 φ 是拓扑群的同构映射, $K_i/(K_i \cap Z_i)$ 解析同构于 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_i)$ 的子群 $\mathrm{Ad}_{G_i}(K_i)$, $K/(K \cap Z)$ 解析同构于 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 的子群 $\mathrm{Ad}_G(K)$. 于是 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致嵌入子代数, 当且仅当 $\mathfrak{k}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的紧致嵌入子代数. □

有了以上的准备之后, 现在可以证明本节的主要定理.

定理 6.6.3 设 $(\mathfrak{g}, s)$ 是有效正交对称 Lie 代数. 则存在 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_0$ 满足下面条件:

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$;

2) $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 在 s 下不变, 而且对于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B 相互正交;

3) 设 s_0, s_-, s_+ 分别为 s 在 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ 上的限制, 则 $(\mathfrak{g}_0, s_0), (\mathfrak{g}_-, s_-), (\mathfrak{g}_+, s_+)$ 分别是 Euclid 型, 紧型与非紧型的有效正交对称 Lie 代数.

证 设 $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ 如前所述. 令 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{k}_- + \mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{p}_+$. 则由前面讨论知有空间直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_- \dot{+} \mathfrak{g}_0$, 而且

$$s(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0, \quad s(\mathfrak{g}_-) = \mathfrak{g}_-, \quad s(\mathfrak{g}_+) = \mathfrak{g}_+;$$
$$B(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_-) = B(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_+) = B(\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-) = 0.$$

再由前面的讨论知

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0]=[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_0]+[\mathfrak{g},\mathfrak{p}_0]\subseteq[\mathfrak{k},\mathfrak{k}_0]+[\mathfrak{p}_0+\mathfrak{p}_-+\mathfrak{p}_+,\mathfrak{k}_0]+\mathfrak{p}_0\subseteq\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0=\mathfrak{g}_0.$$

故 $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 其次

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_+]&=[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_+]+[\mathfrak{g},\mathfrak{p}_+]\\&=[\mathfrak{k},\mathfrak{k}_+]+[\mathfrak{p}_0+\mathfrak{p}_-+\mathfrak{p}_+,\mathfrak{k}_+]+[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_+]+[\mathfrak{p}_0+\mathfrak{p}_++\mathfrak{p}_-,\mathfrak{p}_+]\\&\subseteq\mathfrak{k}_++\mathfrak{p}_+=\mathfrak{g}_+.\end{aligned}$$

即 $\mathfrak{g}_+$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 同样, $\mathfrak{g}_-$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

由于 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_+\dot{+}\mathfrak{k}_-\dot{+}\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\dot{+}\mathfrak{g}_-\dot{+}\mathfrak{g}_0$ 的紧致嵌入子代数，故 $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}_-$ 与 $\mathfrak{k}_+$ 分别是 $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ 与 $\mathfrak{g}_+$ 的紧致嵌入子代数, 且它们分别是 s_0, s_- 与 s_+ 的定点集合. 于是 $(\mathfrak{g}_0,s_0)$, $(\mathfrak{g}_-,s_-)$ 与 $(\mathfrak{g}_+,s_+)$ 为正交对称 Lie 代数.

又若 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{z}$, 则有 $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_+\dot{+}\mathfrak{z}_-\dot{+}\mathfrak{z}_0$, 这里 $\mathfrak{z}_0=C(\mathfrak{g}_0)$, $\mathfrak{z}_-=C(\mathfrak{g}_-)$, $\mathfrak{z}_+=C(\mathfrak{g}_+)$. 由 $(\mathfrak{g},s)$ 有效, 知 $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{k}=\{0\}$, 即有 $\mathfrak{z}_0\cap\mathfrak{k}_0=\mathfrak{z}_-\cap\mathfrak{k}_-=\mathfrak{z}_+\cap\mathfrak{k}_+=\{0\}$. 因而 $(\mathfrak{g}_0,s_0)$, $(\mathfrak{g}_-,s_-)$ 与 $(\mathfrak{g}_+,s_+)$ 都是有效的.

若 $\mathfrak{p}_0\neq\{0\}$, $\mathfrak{p}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想，自然, $\mathfrak{p}_0$ 也是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Abel 理想，故 $(\mathfrak{g}_0,s_0)$ 是 Euclid 型的.

又由于 $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 故 $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+$ 的 Killing 型为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+$ 上的限制. 由 B 在 $\mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{p}_+$ 的限制分别是负定与正定的, B 在 $\mathfrak{k}_-$ 与 $\mathfrak{k}_+$ 的限制全是负定的, 故 B 在 $\mathfrak{g}_-$ 上的限制, 即 $\mathfrak{g}_-$ 的 Killing 型是负定的，因而 $\mathfrak{g}_-$ 是紧半单 Lie 代数. 故 $(\mathfrak{g}_-,s_-)$ 是紧型的.

令 $\mathfrak{g}_+^*=\mathfrak{k}_++\sqrt{-1}\mathfrak{p}_+$，则 $\mathfrak{g}_+^*$ 的 Killing 型是负定的，故为紧半单 Lie 代数. 于是 $\mathfrak{g}_+$ 为实半单 Lie 代数, 且 $\mathfrak{g}_+=\mathfrak{k}_+\dot{+}\mathfrak{p}_+$ 为其 Cartan 分解. 故 $(\mathfrak{g}_+,s_+)$ 为非紧型的.

若 $\mathfrak{p}_0=\{0\}$, 则 $\mathfrak{k}_0$ 为紧半单 Lie 代数或者 $\mathfrak{k}_0=\{0\}$. 如果 $\mathfrak{p}_-\neq\{0\}$, 令 $\mathfrak{g}_-=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{k}_-+\mathfrak{p}_-$，则有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+$ 分别为紧型与非紧型的.

若 $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}_-=\{0\}$, 这时 $\mathfrak{k}_-=\{0\}$, 而 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{k}_++\mathfrak{p}_+$ 是非紧型有效正交对称 Lie 代数. □

推论 设 $X\in\mathfrak{p}$. 若 $\forall T\in\mathfrak{k}$, 有 $[X,T]=0$, 则 $X\in\mathfrak{p}_0$.

事实上, 设 $X=X_0+X_++X_-$, $X_0\in\mathfrak{p}_0$, $X_-\in\mathfrak{p}_-$, $X_+\in\mathfrak{p}_+$. 于是 $[X_0,T]\in\mathfrak{p}_0$, $[X_+,T]\in\mathfrak{p}_+$, $[X_-,T]\in\mathfrak{p}_-$. 故有 $\mathrm{ad}X_+(\mathfrak{k})=\mathrm{ad}X_-(\mathfrak{k})=0$. 因而 $(\mathrm{ad}X_+)^2=(\mathrm{ad}X_-)^2=0$. 进而 $B(X_+,X_+)=B(X_-,X_-)=0$. 所以 $X_-=X_+=0$, 即 $X=X_0\in\mathfrak{p}_0$. □

6.7 对 偶 性

设 $(\mathfrak{g},s)$ 是一个正交对称 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 对 s 的分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}. \tag{1}$$

于是 s 可以自然扩充为 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^c$ 的对合自同构, 仍用 s 表示. $\mathfrak{g}^c$ 对 s 的分解为

$$\mathfrak{g}^c = \mathfrak{k}^c \dot{+} \mathfrak{p}^c.$$

又设 $\mathfrak{g}^c$ 对 $\mathfrak{g}$ 的共轭为 τ. 则 $\tau s = s\tau = \sigma$ 为 $\mathfrak{g}c$ 的半对合, 其定点集为

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}. \tag{2}$$

$\mathfrak{g}^*$ 也是 $\mathfrak{g}^c$ 的实形式, 且 $\mathfrak{g}^*$ 也在 s 下不变. 将 s 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的限制记为 s^*, 即 $s^* = s|_{\mathfrak{g}^*} = \sigma\tau|_{\mathfrak{g}^*}$. s^* 也是 $\mathfrak{g}^*$ 的对合自同构, 且 $\mathfrak{g}^*$ 对 s^* 分解恰为 (2). 我们称 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 为 $(\mathfrak{g}, s)$ 的**对偶**.

定理 6.7.1 设 $(\mathfrak{g}, s)$ 是正交对称 Lie 代数. $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 为 $(\mathfrak{g}, s)$ 的对偶. 则

1) $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 也是正交对称 Lie 代数, 且其对偶恰为 $(\mathfrak{g}, s)$;

2) $(\mathfrak{g}, s)$ 有效, 则 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 有效;

3) $(\mathfrak{g}, s)$ 为紧型 (非紧型, Euclid 型), 则 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 为非紧型 (紧型,Euclid 型);

4) 若 $(\mathfrak{g}_1, s_1)$ 与 $(\mathfrak{g}_2, s_2)$ 同构, 则 $(\mathfrak{g}_1^*, s_1^*)$ 与 $(\mathfrak{g}_2^*, s_2^*)$ 同构.

证 1) 设 $\mathfrak{g}$ 对 s 的分解为 (1) 式, 则 $\mathfrak{g}^*$ 对 s^* 的分解为 (2) 式. 作 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}^*$ 的映射 f 如下:

$$f(X+Y) = X + \sqrt{-1}Y, \quad X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}.$$

容易验证, f 是线性同构映射. 又对任一 $T \in \mathfrak{k}$, 有

$$\begin{aligned} f([T, X+Y]) &= f([T,X] + [T,Y]) \\ &= [T,X] + \sqrt{-1}[T,Y] \\ &= [T, f(X+Y)]. \end{aligned}$$

即有

$$f \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*} T \cdot f$$

或者

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*} T = f \cdot \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T \cdot f^{-1}.$$

由 $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$ 为紧群, 知 $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*} \mathfrak{k} = f \cdot \exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k} \cdot f^{-1}$ 亦为紧群. 因而 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 为正交对称 Lie 代数.

从 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 的定义立即可知其对偶为 $(\mathfrak{g}, s)$.

2) 设 $X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}$, 而 $X + Y \in C(\mathfrak{g})$. 于是 $[X+Y, \mathfrak{k}] = [X+Y, \mathfrak{p}] = \{0\}$, 故 $[X, \mathfrak{k}] = [X, \mathfrak{p}] = [Y, \mathfrak{k}] = [Y, \mathfrak{p}] = \{0\}$. 于是 $X + \sqrt{-1}Y \in C(\mathfrak{g}^*)$. 反之亦然. 于是

$$\mathfrak{k} \cap C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{k} \cap C(\mathfrak{g}^*).$$

因而 $(\mathfrak{g}, s)$ 有效当且仅当 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 有效.

3) 设 $(\mathfrak{g}, s)$ 为紧型, 即 $\mathfrak{g}$ 为紧半单的. 由 $\mathfrak{g}^*$ 的定义知, (2) 式为 $\mathfrak{g}^*$ 的 Cartan 分解, s^* 为相应的对合自同构, 故 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 是非紧型的.

若 $(\mathfrak{g}, s)$ 为非紧型, 则 s 为 Cartan 对合, (1) 式为 Cartan 分解. 于是由 (2) 式知 $\mathfrak{g}^*$ 是紧半单的, 故 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 是紧型的.

设 $(\mathfrak{g}, s)$ 为 Euclid 型, 即 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想, 故 $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \{0\}$. 于是 $[\sqrt{-1}\mathfrak{p}, \sqrt{-1}\mathfrak{p}] = \{0\}$. 因而 $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 的 Abel 理想. 故 $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 也是 Euclid 型.

4) 设 φ 是 $(\mathfrak{g}_1, s_1)$ 到 $(\mathfrak{g}_2, s_2)$ 的同构. 即

$$s_2 = \varphi s_1 \varphi^{-1}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle s_1} & & \downarrow{\scriptstyle s_2} \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}_2 \end{array}$$

设 $\mathfrak{g}_i$ 对 s_i 的分解为 $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i$, 显然有 $\varphi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$, $\varphi(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$. 定义 $\mathfrak{g}_1^*$ 到 $\mathfrak{g}_2^*$ 的映射如下:

$$\varphi^*(X_1 + \sqrt{-1}Y_1) = \varphi(X_1) + \sqrt{-1}\varphi(Y_1), \quad \forall X_1 \in \mathfrak{k}_1,\ Y_1 \in \mathfrak{p}_1.$$

则不难验证 φ^* 是 $\mathfrak{g}_1^*$ 到 $\mathfrak{g}_2^*$ 的同构, 且 $\varphi^* s_1^* = s_2^* \varphi^*$. 故 $(\mathfrak{g}_1^*, s_1^*)$ 与 $(\mathfrak{g}_2^*, s_2^*)$ 同构. □

读者不难证明下面引理.

引理 6.7.1 设 $\mathfrak{l}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Lie 代数. 而且有复结构 J. 定义 $\mathbf{C}$ 与 $\mathfrak{l}$ 中元素乘法如下:

$$(a + \sqrt{-1}b)X = aX + bJX, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad X \in \mathfrak{l},$$

则 $\mathfrak{l}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 Lie 代数, 且 $\dim(\mathfrak{l}/\mathbf{C}) = \dfrac{1}{2}\dim(\mathfrak{l}/\mathbf{R})$.

定理 6.7.2 设 $\mathfrak{g}$ 为紧半单 Lie 代数. 在 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 中定义对合自同构 σ 为 $\sigma(X, Y) = (Y, X)$. 于是 $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \sigma)$ 为有效正交对称 Lie 代数. 又设 $\mathfrak{g}^c$ 对 $\mathfrak{g}$ 的共轭为 $\bar{\sigma}$. $\mathfrak{g}^c$ 可看成 $2\dim\mathfrak{g}$ 维的实 Lie 代数, 记为 $(\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}}$. 则 $\bar{\sigma}$ 为 $(\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}}$ 的对合自同构, 而且 $((\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*, \sigma^*)$ 与 $((\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}}, \bar{\sigma})$ 同构.

证 由于 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 对 σ 分解为 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, 其中 $\mathfrak{k} = \{(X, X) | X \in \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{p} = \{(X, -X) | X \in \mathfrak{g}\}$. 于是 $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^* = \mathfrak{k} \dot{+} \sqrt{-1}\mathfrak{p}$, 且 σ^* 满足 $\sigma^*|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{k}}$, $\sigma^*|_{\sqrt{-1}\mathfrak{p}} = -\mathrm{id}_{\sqrt{-1}\mathfrak{p}}$. 定义 $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^*$ 到 $(\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}}$ 的映射 φ 如下:

$$\varphi((X, X) + \sqrt{-1}(Y, -Y)) = X + \sqrt{-1}Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

于是有

$$\bar{\sigma}\varphi((X, X) + \sqrt{-1}(Y, -Y)) = X - \sqrt{-1}Y, \quad \varphi\sigma^*((X, X) + \sqrt{-1}(Y, -Y)) = X - \sqrt{-1}Y.$$

因而有 $\bar{\sigma}\varphi=\varphi\sigma^*$. 不难验证, φ 是实 Lie 代数 $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})^*$ 到实 Lie 代数 $(\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}}$ 的同构. 因而 $((\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})^*,\sigma^*)$ 与 $((\mathfrak{g}^c)_{\mathbf{R}},\bar{\sigma})$ 是同构的正交对称 Lie 代数. □

定理 6.7.3 设 $(\mathfrak{g},s)$ 是紧型的正交对称 Lie 代数. $(\mathfrak{g}^*,s^*)$ 为其对偶. 则 $\mathfrak{g}^*$ 有复结构当且仅当 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$, 且 $s(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$.

证 首先, 证明定理的必要性. 由于 $\mathfrak{g}^*$ 有复结构 J, 于是 $\mathfrak{g}^*$ 可视为复 Lie 代数. 由 $\mathfrak{g}$ 半单, 故 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{R}$ (以 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{R}$ 表示将 $\mathfrak{g}^*$ 作为实 Lie 代数) 是半单的, 故 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{C}$ (以 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{C}$ 表示将 $\mathfrak{g}^*$ 作为复 Lie 代数) 是半单的. 设 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{C}$ 的紧致实形式. 则有 $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}_0\dot{+}J\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{R}$ 的 Cartan 分解.

又设 $\mathfrak{g}$ 对 s 的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{g}^*/\mathbf{R}$ 又有 Cartan 分解 $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\mathfrak{p}$. 由 Cartan 分解的唯一性知, 有 $\sigma\in\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^*/\mathbf{R})$ 使得 $\sigma(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{k}$, $\sigma(J\mathfrak{g}_0)=\sqrt{-1}\mathfrak{p}$.

作 $\mathfrak{p}$ 到 $\mathfrak{k}$ 的映射 γ 如下: $\gamma(X)=-\sigma J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}X)$, $\forall X\in\mathfrak{p}$. 显然, γ 是 $\mathfrak{p}$ 到 $\mathfrak{k}$ 上的一一线性映射, 而且

$$\begin{aligned}[\gamma(X),\gamma(Y)]&=[-\sigma J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}X),-\sigma J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}Y)]\\&=[J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}X),J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}Y)]=[X,Y],\\\gamma([\gamma(X),Y])&=-\sigma J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}[-\sigma J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}X),Y])\\&=\sigma J[J\sigma^{-1}(\sqrt{-1}X),\sigma^{-1}(\sqrt{-1}Y)]=-[\sqrt{-1}X,\sqrt{-1}Y]\\&=[X,Y].\end{aligned}$$

又 $[X,Y]=\gamma[\gamma(X),Y]=-\gamma([Y,\gamma(X)])$, $[X,Y]=-[Y,X]=-\gamma[\gamma(Y),X]$. 由 γ 是一一的, 知 $[\gamma(X),Y]=[X,\gamma(Y)]$.

现令 $\mathfrak{g}_1=\{X+\gamma(X)|X\in\mathfrak{p}\}$, $\mathfrak{g}_2=\{X-\gamma(X)|X\in\mathfrak{p}\}$. 由于

$$X=\frac{1}{2}(X+\gamma(X))+\frac{1}{2}(X-\gamma(X))\in\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2,$$
$$\gamma(X)=\frac{1}{2}(X+\gamma(X))-\frac{1}{2}(X-\gamma(X))\in\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2,$$

及 $X+\gamma(X)=Y-\gamma(Y)$, 知 $\gamma(X+Y)=Y-X\in\mathfrak{k}\cap\mathfrak{p}=\{0\}$. 因而 $Y-X=X+Y=0$. 即 $X=Y=0$, 故 $\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=\{0\}$. 因而 $\mathfrak{g}$ 有空间直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2$. 对于 $X\in\mathfrak{p},\gamma(X)\in\mathfrak{k}$, 有 $X+\gamma(X)\in\mathfrak{g}_1$,

$$s(X+\gamma(X))=-X+\gamma(X)\in\mathfrak{g}_2.$$

所以有 $s(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$. 而 $\forall X\in\mathfrak{p},Y+\gamma(Y)\in\mathfrak{g}_1$,

$$[X,Y+\gamma(Y)]=[X,Y]+[X,\gamma(Y)]=\gamma([X,\gamma(Y)])+[X,\gamma(Y)]\in\mathfrak{g}_1,$$
$$[\gamma(X),Y+\gamma(Y)]=[\gamma(X),Y]+[\gamma(X),\gamma(Y)]=[\gamma(X),Y]+\gamma([\gamma(X),Y])\in\mathfrak{g}_1.$$

因而 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 故 $\mathfrak{g}_2 = s(\mathfrak{g}_1)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 这样我们完成了必要性的证明.

下面证明充分性. 设 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 而且 $s(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$. 作 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 = \{(X, Y)|X \in \mathfrak{g}_1\}$. 再作 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_0$ 的映射 φ 如下: $\varphi(X+Y) = (X, s(Y)), \forall X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2$. 令 $s_0 = \varphi s \varphi^{-1}$. 显然, φ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_0$ 的同构映射. s_0 为 $\mathfrak{g}_0$ 的对合自同构. 于是, $(\mathfrak{g}, s)$ 与 $(\mathfrak{g}_0, s_0)$ 是同构的正交对称 Lie 代数. 又

$$
\begin{aligned}
s_0(X, s(Y)) &= \varphi s \varphi^{-1}(X, s(Y)) = \varphi s(X+Y) \\
&= \varphi(s(X) + s(Y)) = (s(Y), s(s(X))) = (s(Y), X).
\end{aligned}
$$

因而 $(\mathfrak{g}_0, s_0)$ 恰为正交对称 Lie 代数. 故 $(\mathfrak{g}_0^*, s_0^*)$ 有复结构. $(\mathfrak{g}^*, s^*)$ 与 $(\mathfrak{g}_0^*, s_0^*)$ 同构, 故 $\mathfrak{g}^*$ 也有复结构. □

例 6.7.1 求 $(\mathfrak{so}(n+1), s)$ 的对偶, 其中 s 定义为

$$s(X) = I_{1n} X I_{1n}.$$

$(\mathfrak{so}(1+n)^*, s^*)$ 与 $(\mathfrak{so}(1, n), s_1)$ 是同构的正交对称 Lie 代数.

当 $n = 3$ 时, 上述例子特别有意义. 在讨论这种情况之前. 先看一看 $\mathfrak{so}(4)$ 的结构. 为此, 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则有 A, B, C 是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ 的一组基, 而且

$$-AB = BA = C, BC = -CB = A, AC = -CA = B.$$

于是

$$e_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{pmatrix}$$

是 $\mathfrak{so}(4)$ 中元素, 且有

$$[e_1, e_2] = -2e_3, [e_2, e_3] = -2e_1, [e_3, e_1] = -2e_2.$$

从而 e_1, e_2, e_3 生成 $\mathfrak{so}(4)$ 中一个三维子代数 $\mathfrak{g}_1$. $\mathfrak{g}_1$ 是与 $\mathfrak{so}(3)$ 同构的 ($\mathfrak{so}(3)$ 是与 $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ 同构的).

例 6.7.2 $(\mathfrak{so}(4), s)$ 的对偶 $(\mathfrak{so}(4)^*, s^*)$ 有复结构, 故 $\mathfrak{so}(1, 3)$ 有复结构. 这里 s 如例 6.7.1 所述.

例 6.7.3 设 $n = p + q$. $I_{pq} = \mathrm{diag}(-I_p, I_q)$. 作 $\mathfrak{so}(p+q)$ 的对合自同构 s 如下:

$$s(X) = I_{pq} X I_{pq}.$$

$(\mathfrak{so}(p, q), s_1)$ 与 $(\mathfrak{so}(p+q)^*, s^*)$ 同构. 因而可将 $(\mathfrak{so}(p, q), s_1)$ 看成 $(\mathfrak{so}(p+q), s)$ 的对偶.

从这个例子可以看到 $(SO(p+q), SO(p)\times SO(q))$ 是一个紧型的 Riemann 对称对. 故 $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ 是一个紧型的 Riemann 对称空间, 叫做**定向 Grassmann 流形**. $(O(p+q), O(p)\times O(q))$ 也是紧型的 Riemann 对称对.$O(p+q)/O(p)\times O(q)$ 叫做 **Grassmann 流形**. 令 $S(O(p)\times O(q)) = \{A\in O(p)\times O(q)|detA=1\}$. 则有

$$O(p+q)/O(p)\times O(q) = SO(p+q)/S(O(p)\times O(q)).$$

6.8　对称空间的截曲率

下面三节是围绕 Riemann 对称空间的分解这一课题展开的.

设 M 是一个 Riemann 对称空间. M 对应的一个 Riemann 对称对 (G,K), 即有 $M=G/K$. 设 π 是 G 到 M 的自然映射. G 在 M 上的作用为 $\tau(g)\pi(x)=\pi(gx), \forall g,x\in G$, 即 $\tau(g)\cdot\pi=\pi\cdot L_g$.

再设 $(\mathfrak{g},s)$ 是对应的正交对称 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 对 s 的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$, 这里 $\mathfrak{k}=E_1(s)$, $\mathfrak{p}=E_{-1}(s)$.

以下仍按惯例将 $\mathfrak{p}$ 与 $M_{\pi(e)}$ 等同. 自然, 线性空间 $\mathfrak{p}$ 也是一个流形. 而且, $\mathfrak{p}$ 在每点的切空间与 $\mathfrak{p}$ 同构, 故也可视为 $\mathfrak{p}$. 设 Exp 是 $M_{\pi(e)}(=\mathfrak{p})$ 到 M 的指数映射, 则 $d\mathrm{Exp}_X$ 是 $M_{\pi(e)}$ 的切空间 $\mathfrak{p}$ 到 M 的切空间 $\mathfrak{p}$ 的映射.

定理 6.8.1　指数映射 $\mathrm{Exp}:\mathfrak{p}\to G/K$ 与 M 的 Riemann 结构 Q 的选取无关且其微分由下面关系确定:

$$d\mathrm{Exp}_X = d\tau(\exp X)_o\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(T_X)^n}{(2n+1)!},$$

其中 $X\in\mathfrak{p}$, $o=\pi(e)$, $T_X=(\mathrm{ad}X)^2$.

证　设 $X,Y\in\mathfrak{p}$, 于是 $\pi(\exp X)=\mathrm{Exp}X$, 这里, exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射. 又由于在 Lie 群中有 $d\exp X = d(L_{\exp X})_e\cdot\dfrac{\mathrm{id}-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}, \forall X\in\mathfrak{g}$. 于是, 有

$$\begin{aligned} d\mathrm{Exp}_X(Y) &= d\pi\cdot d\exp_X(Y) = d\pi\cdot dL_{\exp X}\cdot\frac{\mathrm{id}-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}(Y) \\ &= d\tau(\exp X)d\pi\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{ad}X)^m}{(m+1)!}\right)(Y). \end{aligned}$$

由 $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subseteq\mathfrak{p}, [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{k}$, 知 $d\pi((\mathrm{ad}X)^m Y)=\begin{cases} T_X^n(Y), & m=2n, \\ 0, & m=2n+1. \end{cases}$ 由此可知定理成立. □

定理 6.8.2 设 $M=G/K$ 是一个 Riemann 对称空间. G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 对应的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$. 又设 S 是 $\mathfrak{p}$ 的一个二维子空间. 则 M 沿 S 的截曲率 $K(S)$ 为

$$K(S)=Q_o(\mathrm{ad}([X_1,X_2])X_1,X_2),$$

这里 Q 为 M 的 Riemann 结构, $o=\pi(e)$, X_1,X_2 为 S 的两个正交单位向量.

证 设 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 是 $\mathfrak{p}$ 的正交基. 因而 $S=\{X=x_1X_1+x_2X_2|x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$ 上的 Laplace 算子为$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. 设 $X,Y\in S$, 以 $|X\vee Y|$ 表示 X,Y 生成的平行四边形的面积. 由定理 6.8.1 知

$$d\mathrm{Exp}_X(X_i)=d\tau(\exp X)_oA_X(X_i),\quad i=1,2,$$

$\tau(\exp X)$ 是 M 上等距变换. 故

$$\begin{aligned}f(X)=&|d\mathrm{Exp}_XX_1\vee d\mathrm{Exp}_XX_2|\\=&|d\tau(\exp X)A_XX_1\vee d\tau(\exp X)A_XX_2|=|A_XX_1\vee A_XX_2|,\end{aligned}$$

其中$A_X=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(T_X)^n}{(2n+1)!}$. 令 $A_{ij}=\mathrm{ent}_{ij}M(A_X;X_1,X_2,\cdots,X_p)$, $T_{ij}=\mathrm{ent}_{ij}M(T_X;X_1,X_2,\cdots,X_p)$. 因而有

$$\begin{aligned}2[\Delta f](0)=&[\Delta(A_{11}A_{22})^2](0)\\=&2\left((\Delta(A_{11}A_{22}))(0)+\left(\frac{\partial A_{11}A_{22}}{\partial x_1}\right)^2(0)+\left(\frac{\partial A_{11}A_{22}}{\partial x_2}\right)^2(0)\right).\end{aligned}$$

另一方面, 由

$$T_X=(\mathrm{ad}X)^2=(\mathrm{ad}(x_1X_1+x_2X_2))^2=x_1^2T_{X_1}+x_2^2T_{X_2}+x_1x_2(\mathrm{ad}X_1\mathrm{ad}X_2+\mathrm{ad}X_2\mathrm{ad}X_1),$$

于是有

$$\left(\frac{\partial A_{11}A_{22}}{\partial x_1}\right)^2(0)=\left(\frac{\partial A_{11}A_{22}}{\partial x_2}\right)^2(0)=0,$$

$$(\Delta(A_{11}A_{22}))(0)=\frac{1}{3!}(\Delta(T_{11}+T_{22}))(0)=\frac{1}{3}(Q_o(T_{X_1}X_2,X_2)+Q_o(T_{X_2}X_1,X_1)).$$

因而

$$\begin{aligned}K(S)=&-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}(Q_o(T_{X_1}X_2,X_2)+Q_o(T_{X_2}X_1,X_1))\\=&-\frac{1}{2}(Q_o([X_1,[X_1,X_2]],X_2)+Q_o([X_2,[X_2,X_1]],X_1))\\=&\frac{1}{2}(Q_o([[X_1,X_2],X_1],X_2)+Q_o(X_2,[[X_1,X_2],X_1]))=Q_o(\mathrm{ad}([X_1,X_2])X_1,X_2).\end{aligned}$$

□

定理 6.8.3 设 M 是 Riemann 对称空间. (G, K) 是对应的 Riemann 对称对. K 是 G 的连通闭子群. $(\mathfrak{g}, s)$ 为相应的正交对称 Lie 代数. Q 为 M 的 G 不变 Riemann 结构.

1) 如果 (G, K) 是紧型的, 则 $K(S) \geqslant 0$;

2) 如果 (G, K) 是非紧型的, 则 $K(S) \leqslant 0$;

3) 如果 (G, K) 是 Euclid 型的, 则 $K(S) = 0$.

证 设 $\mathfrak{g}$ 对 s 有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$. 一如往常, 令 $\mathfrak{p} = M_{\pi(e)}$. Q_o 为 Q 在 $\mathfrak{p}$ 上诱导的内积, B 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 于是有 $\mathfrak{p}$ 的标准正交基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 使得 $B(X_i, X_j) = \delta_{ij}\beta_i$. 作 $\mathfrak{p}$ 的线性变换 $\mathcal{B}$, 使得

$$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i X_i, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

于是 $Q_o(\mathcal{B}X, Y) = B(X, Y)$.

设 S 是 $\mathfrak{p}$ 中二维子空间. X, Y 为 S 的标准正交基. 则由定理 6.8.2 知 $K(S) = Q_o(\mathrm{ad}[X, Y]X, Y)$.

1) (G, K) 为 Euclid 型, 则 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Abel 理想. 故 $K(S) = 0$.

2) 及 3) 设 (G, K) 为紧型 (或非紧型). 于是

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \dot{+} \mathfrak{p}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{p}_{n_1}, \quad n_1 \leqslant n,\ \mathfrak{p}_i = E_{\beta_i}(\mathcal{B}),\ \beta_i < 0\,(\beta_i > 0).$$

而且当 $i \neq j$ 时, $Q_o(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = B(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = 0$. 任取 $Z_i \in \mathfrak{p}_i, Z_j \in \mathfrak{p}_j, i \neq j, T \in \mathfrak{k}$ 有 $\mathrm{ad}T(Z_i) \in \mathfrak{p}_i$, $\mathrm{ad}T(Z_j) \in \mathfrak{p}_j$, $[Z_i, Z_j] \in \mathfrak{k}$. 而 $B(T, [Z_i, Z_j]) = B([T, Z_i], Z_j) = 0$. 又 B 在 $\mathfrak{k}$ 上是负定的, 于是 $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] = 0$.

现设 X, Y 对 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \dot{+} \mathfrak{p}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{p}_{n_1}$ 的分解为 $X = X_1' + X_2' + \cdots + X_{n_1}'$, $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n_1}$. 于是有 $[X, Y] = \sum\limits_{i=1}^{n_1} [X_i', Y_i]$, $[[X, Y], X] = \sum\limits_{i=1}^{n_1} [[X_i', Y_i], X_i']$. 因此

$$\begin{aligned} K(S) &= Q_o(\mathrm{ad}[X, Y]X, Y) = \sum_{i=1}^{n_1} Q_o([[X_i', Y_i], X_i'], Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\beta_i} Q_o([[X_i', Y_i], X_i'], \mathcal{B}Y_i) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\beta_i} B([[X_i', Y_i], X_i'], Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\beta_i} B([X_i', Y_i], [X_i', Y_i]). \end{aligned}$$

由于 (G, K) 为紧型 (非紧型) 时 $\beta_i < 0 (\beta_i > 0)$, 故 $K(S) \geqslant 0$ $(K(S) \leqslant 0)$. □

进一步可以证明下面的定理.

定理 6.8.4 设 (G, K) 是 Riemann 对称对. $o = \pi(e)$. Q 为 G/K 上的 Riemann 结构. 对应的正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, s)$ 有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$. 将 $\mathfrak{p}$ 与 $(G/K)_o$ 等同. 则 G/K 的 Riemann 曲率张量 R 在 o 处的值为 $R_o(X,Y)Z = -[[X,Y],Z]$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{p}$.

从这里知道, 曲率张量 R 与 Riemann 结构 Q 的选取无关, 而挠率张量 T 也与 Q 的选取无关. 从几何上还可以进一步论证 Riemann 对称空间的联络 ∇ 也与 Q 的选取无关.

习 题

1. 证明 $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ 的截曲率 $K(S) = \dfrac{1}{2(n-1)}$.
2. 证明双曲空间 H_1^n 的截曲率 $K(s) = -1/2(n-1)$,
3. 复射影空间的截曲率 $K(S) = \dfrac{1}{4(n+1)} - 6(n+1)((X'\bar{Y})^2 + (Y'\bar{X})^2)$.

6.9 Riemann 对称空间的分解

等距变换群为半单群的 Riemann 对称空间叫做**半单型 Riemann 对称空间**. 半单型 Riemann 对称空间还可以进一步分解.

我们先讨论半单型 Riemann 对称空间的一个基本性质. 为此, 需要下面的概念与结果.

设 G/K 是一个齐性空间. $\forall g \in G$, G/K 上映射

$$\tau(g)(g_1K) = gg_1K$$

是一个解析同胚. 令 $o = \{K\}$. 则 $\forall k \in K, \tau(k)o = o$. 于是

$$d\tau(k)M_o = M_o.$$

因而 $(d\tau, M_o)$ 是群 K 的一个以 M_o 为表示空间的线性表示, 称为 K 的**迷向表示**, K 在迷向表示 $d\tau$ 下的像 $d\tau(K) = K^*$ 是 $GL(M_o)$ 的子群, 叫做**线性迷向群**.

设 M 是一个 Riemann 对称空间. $p \in M$, 用 $\mathfrak{p}$ 表示 M 在 p 处的切空间. R 为曲率张量, Q 为 Riemann 结构. 对于 $A \in \mathrm{End}(\mathfrak{p})$, 则 A 可唯一地扩充为混合张量代数 $\mathcal{D}(\mathfrak{p})$ 的导子, 满足下面两个条件:

i) 保持张量的型不变;

ii) 与任何缩并作用可换;

将扩充后的导子仍记为 A, 即 $A \in \mathrm{Der}(\mathcal{D}(\mathfrak{p}))$.

引理 6.9.1 设 $A \in \mathrm{End}(\mathfrak{p})$, 并将 A 扩充为 $\mathcal{D}(\mathfrak{p})$ 的导子, 仍记为 A. 则有

1) $A(c) = 0, \forall c \in \mathbf{R}$;

2) $A\omega(X) = -\omega(AX), \forall \omega \in \mathcal{D}_1(\mathfrak{p}), X \in \mathcal{D}^1(\mathfrak{p})$;

3) $(AQ_p)(X,Y) = -Q_p(AX,Y) - Q_p(X,AY)$;

4) $\forall X, Y \in \mathcal{D}^1(\mathfrak{p})$,

$$(AR_p)(X,Y) = [A, R_p(X,Y)] - R_p(AX,Y) - R_p(X,AY),$$

这里 Q_p, R_p 分别为 Q, R 在 p 点的取值.

证 1) $A(c) = cA(1) = c(A(1)\cdot 1 + 1 \cdot A(1)) = 2cA(1)$, 故 $A(c) = 0$.

2) $A(\omega \otimes X) = A\omega \otimes X + \omega \otimes AX$ 两边缩并, 由 A 与缩并可换, 及 1) 知

$$0 = A\omega(X) + \omega(AX).$$

因而 $A\omega(X) = -\omega(AX)$.

3) 将

$$\begin{aligned}&A(Q_p \otimes X \otimes Y)\\ =&AQ_p \otimes X \otimes Y + Q_p \otimes AX \otimes Y + Q_p \otimes X \otimes AY\end{aligned}$$

两边缩并, 利用 A 与缩并可换, 及 1) 有

$$0 = AQ_p(X,Y) + Q_p(AX,Y) + Q_p(X,AY).$$

即 $AQ_p(X,Y) = -Q_p(AX,Y) - Q_p(X,AY)$.

4) 设 $X, Y \in \mathcal{D}^1(\mathfrak{p})$, 任取 $\omega \in \mathcal{D}_1(\mathfrak{p})$, $Z \in \mathcal{D}^1(\mathfrak{p})$, 于是有

$$\begin{aligned}&A(\omega \otimes R_p \otimes X \otimes Y \otimes Z)\\ =&A\omega \otimes R_p \otimes X \otimes Y \otimes Z\\ &+\omega \otimes AR_p \otimes X \otimes Y \otimes Z\\ &+\omega \otimes R_p \otimes AX \otimes Y \otimes Z\\ &+\omega \otimes R_p \otimes X \otimes AY \otimes Z\\ &+\omega \otimes R_p \otimes X \otimes Y \otimes AZ.\end{aligned}$$

由 A 与缩并可换及 1) 可得

$$\begin{aligned}0 =& A\omega(R_p(X,Y)Z) + \omega(AR_p(X,Y)Z)\\ &+\omega(R_p(AX,Y)Z) + \omega(R_p(X,AY)Z)\\ &+\omega(R_p(X,Y)AZ).\end{aligned}$$

利用 2) 有

$$\begin{aligned}\omega(AR_p(X,Y)Z)=&\,\omega(A(R_p(X,Y)Z))-\omega(R_p(AX,Y)Z)\\&-\omega(R_p(X,AY)Z)+\omega(R_p(X,Y)AZ).\end{aligned}$$

因而有

$$AR_p(X,Y)=[A,R_p(X,Y)]-R_p(AX,Y)-R_p(X,AY).$$

引理证毕. □

推论 若 $A\in\mathrm{end}(\mathfrak{p})$, 且 $AR_p(X,Y)=0$, 则

$$[A,R_p(X,Y)]=R_p(AX,Y)+R_p(X,AY). \tag{1}$$

这是引理 6.9.1 的结论 4) 的特殊情形. □

以下我们总假定 $\mathfrak{k}_1$ 是 $\mathrm{End}(\mathfrak{p})$ 中满足下述关系的元素组成的集合. $A\in\mathfrak{k}_1$ 当且仅当 A 按上述方式扩充为 $\mathrm{Der}(\mathcal{D}(\mathfrak{p}))$ 中元素后有 $AQ_p=0$, $AR_p=0$, 即

$$\mathfrak{k}_1=\{A\in\mathrm{end}(\mathfrak{p})|AR_p=0,AQ_p=0\}.$$

引理 6.9.2 $\mathfrak{k}_1$ 对于括积 $[A,B]=AB-BA$ 构成一个 Lie 代数. 又 $\forall X,Y\in\mathcal{D}^1(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}$ 有 $R_p(X,Y)\in\mathfrak{k}_1$.

证 由 $\mathfrak{k}_1$ 的定义知 $A\in\mathfrak{k}_1$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&Q_p(AX,Y)+Q_p(X,AY)=0,\\&[A,R_p(X,Y)]=R_p(AX,Y)+R_p(X,AY).\end{aligned}$$

$\mathfrak{k}_1$ 为线性空间是显然的. 故只要证明 $\mathfrak{k}_1$ 对括积封闭. 现设 $A,B\in\mathfrak{k}_1$, 于是

$$\begin{aligned}&Q_p([A,B]X,Y)+Q_p(X,[A,B]Y)\\=&-Q_p(BX,AY)+Q_p(AX,BY)+Q_p(BX,AY)-Q_p(AX,BY)\\=&\,0,\\&[[A,B],R_p(X,Y)]\\=&\,[[A,R_p(X,Y)],B]+[A,[B,R_p(X,Y)]]\\=&\,[R_p(AX,Y)+R_p(X,AY),B]+[A,R_p(BX,Y)+R_p(X,BY)]\\=&-R_p(BAX,Y)-R_p(AX,BY)-R_p(BX,AY)\\&-R_p(X,BAY)+R_p(ABX,Y)+R_p(BX,AY)\\&+R_p(AX,BY)+R_p(X,ABY)\\=&\,R_p([A,B]X,Y)+R_p(X,[A,B]Y).\end{aligned}$$

故 $[A, B] \in \mathfrak{k}_1$. 因而 $\mathfrak{k}_1$ 是 Lie 代数.

由文献 [5] 之引理 4.1.2 知, $\forall X, Y, V, W \in \mathcal{D}^1(\mathfrak{p})$ 有

$$Q_p(R_p(X,Y)V, W) + Q_p(V, R_p(X,Y)W) = 0.$$

下面只要证明 $R_p(X,Y)R_p = 0$ 即可.

取 $X^*, Y^* \in \mathcal{D}(M)$, $X_p^* = X$, $Y_p^* = Y$, 于是有

$$R(X^*, Y^*) = \nabla_{X^*}\nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*}\nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*,Y^*]}.$$

又 $R(X^*, Y^*)$ 是混合张量代数 $\mathcal{D}(M)$ 的导子, 保持张量的型不变, 并于任何缩并可换. 又

$$R(fX^*, gY^*)hZ = fghR(X^*, Y^*) \cdot Z,$$
$$\forall f, g, h \in \mathcal{F}(M), \quad Z \in \mathcal{D}^1(M).$$

也就是说, $\forall T \in \mathcal{D}(M)$, $(R(X^*, Y^*)T)_p$ 仅依赖于 $R_p(X,Y)$ 与 T_p, 故有

$$R_p(X,Y) \cdot T_p = (R(X^*, Y^*)T)_p.$$

因而 $T_p \to R_p(X,Y) \cdot T_p$ 是将 $\mathrm{End}\mathfrak{p}$ 中元素 $R_p(X,Y)$ 扩充为 $\mathrm{Der}(\mathcal{D}(\mathfrak{p}))$ 中所要求的唯一的元素. 因为 M 是 Riemann 对称空间, 由文献 [5] 之引理 1.3.2 知

$$R_p(X,Y)R_p = ((\nabla_{X^*}\nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*}\nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*,Y^*]})R)_p = 0.$$

这就说明 $R_p(X,Y) \in \mathfrak{k}_1$. □

定理 6.9.1　设 M 是一个单连通的 Riemann 对称空间. 则 M 有积分解

$$M = M_0 \times M_- \times M_+,$$

这里 M_0 是 Euclid 空间, M_- 与 M_+ 分别为紧型与非紧型的单连通 Riemann 对称空间.

证　设 $G = I_o(M)$, K 是 M 中点 o 的迷向子群. 故 $M = G/K$. 设 $(\tilde{G}, \varphi)$ 为 G 的通用覆盖群, φ 为覆盖映射. 设 $\tilde{K}$ 为 $\varphi^{-1}(K)$ 的单位连通分支. 定义 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 到 G/K 上的映射 ψ 如下:

$$\psi(g\tilde{K}) = \varphi(g)K, \quad \forall g \in \tilde{G},$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \tilde{G}/\tilde{K} & \xrightarrow{\psi} & G/K \end{array}$$

其中 π_1, π_2 分别为 $\tilde{G}$ 到 $\tilde{G}/\tilde{K}$, G 到 G/K 上的自然映射. 因而 $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ 是流形 $M = G/K$ 的覆盖流形. 但由于 M 是单连通的, 故 $\tilde{G}/\tilde{K} = M$. 于是 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G =$

Lie$\tilde{G}$ 有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_o\oplus+\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_+$. $\tilde{G}$ 对应地有分解 $\tilde{G}=G_o\times G_-\times G_+$, $\tilde{K}=K_o\times K_-\times K_+$. 于是有

$$M=\tilde{G}/\tilde{K}=G_o/K_o\times G_-/K_-\times G_+/K_+=M_o\times M_-\times M_+.$$

由拓扑学理论知, M_0, M_- 与 M_+ 都是单连通的, 故 M_0 为 Euclid 空间. □

下面进一步考虑半单型的 Riemann 对称空间的分解. 为此, 先引进一个概念.

定义 6.9.1 设 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 为半单型有效正交对称 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$. 如果 $(\mathrm{ad},\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{k}$ 的不可约表示, 则称 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是**不可约**的.

又若 Riemann 对称对 (G,K) 对应的正交对称 Lie 代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 是不可约的, 则称 $M=G/K$ 是**不可约 Riemann 对称空间**

定理 6.9.2 设 $(\mathfrak{g},s)$ 是半单的有效正交对称 Lie 代数. 则 $(\mathfrak{g},s)$ 可分解为不可约正交对称 Lie 代数的直和 $(\mathfrak{g},s)=(\mathfrak{g}_1,s_1)\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_r,s_r)$, 而且除排列次序外, 上述分解是唯一的.

证 设 $\mathfrak{g}$ 对 s 有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$. 又设 B 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则由 $\mathfrak{g}$ 半单, 知 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_+$. 故可假定 $\mathfrak{g}$ 是紧型或非紧型. 于是 $Q=\pm B|_{\mathfrak{p}}$ 是表示空间 $\mathfrak{p}$ 的不变内积. 故 $\mathfrak{p}$ 可分解为不可约子空间的直和 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1\dot{+}\mathfrak{p}_2\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{p}_r$, 而且 $i\neq j$ 时, $Q(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j)=0$, 即 $B(\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j)=0$.

显然, $i\neq j$ 时, 有 $B(\mathfrak{p},[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j])=0$, $B(\mathfrak{k},[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j])=B([\mathfrak{k},\mathfrak{p}_i],\mathfrak{p}_j)=0$. 即有 $B(\mathfrak{g},[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j])=0$. 由 B 的非退化性知 $[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j]=0$. 令 $\mathfrak{k}_i=[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_i]$, $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{k}_i+\mathfrak{p}_i$. 于是有 $\mathfrak{k}=[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]=\sum\limits_{i=1}^{r}[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_i]=\sum\limits_{i=1}^{r}\mathfrak{k}_i$. 因而 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2+\cdots+\mathfrak{g}_r$. 又 $[\mathfrak{g},\mathfrak{p}_i]=[\mathfrak{k}+\mathfrak{p},\mathfrak{p}_i]=[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_i]+\sum\limits_{j}[\mathfrak{p}_j,\mathfrak{p}_i]=\mathfrak{p}_i+\mathfrak{k}_i\subseteq\mathfrak{g}_i$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{k}_i]\subseteq[[\mathfrak{g},\mathfrak{p}_i],\mathfrak{p}_i]\subseteq[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{p}_i]\subseteq\mathfrak{g}_i$. 因而 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 且 $i\neq j$ 时, $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_j]=[[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_j],\mathfrak{p}_i]=0$, $B(\mathfrak{k}_i,\mathfrak{k}_j)=B(\mathfrak{k}_i,[\mathfrak{p}_j,\mathfrak{p}_j])=B([\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_j],\mathfrak{p}_j)=0$. 于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r$. 显然 $s(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_i$. 令 $s_i=s|_{\mathfrak{g}_i}$, 则 $(\mathfrak{g}_i,s_i)$ 为半单有效正交对称 Lie 代数.

若 $\mathfrak{p}_i'$ 为 $\mathfrak{p}_i$ 的子空间, 且 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i']\subseteq\mathfrak{p}_i'$, 则 $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}_i']=\left[\sum\limits_{j=1}^{r}\mathfrak{k}_j,\mathfrak{p}_i'\right]=[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i']\subseteq\mathfrak{p}_i'$. 故 $\mathfrak{p}_i'$ 为 $(\mathrm{ad}\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ 的不变子空间. 但 $\mathfrak{p}_i$ 是不可约的, 故 $\mathfrak{p}_i'=\{0\}$ 或 $\mathfrak{p}_i'=\mathfrak{p}_i$. 即 $(\mathfrak{g}_i,s_i)$ 是不可约的.

下面讨论分解的唯一性. 设 $\mathfrak{g}$ 另有分解 $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}_1',s_1')\oplus(\mathfrak{g}_2',s_2')\oplus\cdots\oplus(\mathfrak{g}_t',s_t')$, $\mathfrak{g}_j'=\mathfrak{k}_j'\dot{+}\mathfrak{p}_j'$, $\mathfrak{k}_j'=[\mathfrak{p}_j',\mathfrak{p}_j']$. 于是有 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_1'+\mathfrak{k}_2'+\cdots+\mathfrak{k}_t'=\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2\cdots+\mathfrak{k}_r$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1'\dot{+}\mathfrak{p}_2'\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{p}_t'=\mathfrak{p}_1\dot{+}\mathfrak{p}_2\cdots\dot{+}\mathfrak{p}_r$. 由 $[\mathfrak{k}_i,[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i]]\subseteq[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i]$ 知 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i]$ 是 $\mathfrak{p}_i$ 中不变子空间. 又 $\mathfrak{p}_i$ 不可约, 故 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i]=\mathfrak{p}_i,[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}]=\mathfrak{p}_i$. 因为 $\mathfrak{p}_j'$, $j=1,2,\cdots,t$ 是 $\mathfrak{k}$ 的表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{p})$ 的不可约不变子空间, 所以在 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}_i$ 下也不变, 即 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_i']\subseteq\mathfrak{p}_j'$. 由 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}]=\mathfrak{p}_i\neq\{0\}$, 有 j_i 使得 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_{j_i}']\neq\{0\}$. 而 $[\mathfrak{k}_{j_i}',[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_{j_i}']]\subseteq[[\mathfrak{k}_{j_i}',\mathfrak{k}_i],\mathfrak{p}_{j_i}']+[\mathfrak{k}_i,[\mathfrak{k}_{j_i}',\mathfrak{p}_{j_i}']]=[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_{j_i}']$. 故 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_{j_i}']$ 是 $\mathrm{ad}\mathfrak{k}_{j_i}'$ 的不变子空间. 因而 $[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}_{j_i}']=\mathfrak{p}_{j_i}'\subseteq[\mathfrak{k}_i,\mathfrak{p}]\subseteq\mathfrak{p}_i$. 即有 $\mathfrak{p}_{j_i}'\subseteq\mathfrak{p}_i$.

又 $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}'_{j_i}$ 均为不可约子空间. 于是 $\mathfrak{p}'_{j_i} = \mathfrak{p}_i$. 由此得到 $r = t$, $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}_2,' \cdots, \mathfrak{p}'_r$ 是 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$ 的排列. 故 $\mathfrak{g}'_1, \mathfrak{g}'_2, \cdots, \mathfrak{g}'_r$ 是 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_r$ 的排列. □

定理 6.9.3　*设 $(\mathfrak{g}, s)$ 是不可约正交对称 Lie 代数. 则 $\mathfrak{g}$ 或为单 Lie 代数, 或 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 这里 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想, 且 $s\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$.*

证　1) 设 $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数. 则由定理 6.9.2 知 $(\mathfrak{g}, s)$ 是不可约正交对称 Lie 代数.

2) 设 $\mathfrak{g}$ 不是单 Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 有单理想 $\mathfrak{g}_1$. 则 $\mathfrak{g}_1^\perp = \{X \in \mathfrak{g} | B(X, \mathfrak{g}_1) = 0\}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^\perp$. 注意到 $s\mathfrak{g}_1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的单理想, 因而或者 $s\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$, 或者 $s\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$.

若 $s\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$, 则由 $B(\mathfrak{g}_1, s\mathfrak{g}_1^\perp) = B(s\mathfrak{g}_1, s\mathfrak{g}_1^\perp) = B(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1^\perp) = 0$, 知 $s\mathfrak{g}_1^\perp = \mathfrak{g}_1^\perp$. 于是 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_1^\perp$. $\mathfrak{p}_1$ 是不可约不变子空间, 与 $\mathfrak{p}$ 不可约矛盾. 故 $s\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}_1$. 因此 $s\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$, 此时 $s\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_1^\perp$. 于是得到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus s\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 这里 $\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}_1 \oplus s\mathfrak{g}_1)^\perp$. 易证 $s\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$. 若 $\mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$, 则 $(\mathfrak{g}, s)$ 不是不可约的. 故 $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$. 于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^\perp = \mathfrak{g}_1 \oplus s\mathfrak{g}_1$. 易得 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, $\mathfrak{k} = \{X + sX | X \in \mathfrak{g}_1\}$, $\mathfrak{p} = \{X - sX | X \in \mathfrak{g}_1\}$. $\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 同构, 故 $\mathfrak{g}_1$ 为紧单 Lie 代数. 又 $[X + sX, Y - sY] = [X, Y] - s[X, Y]$. 由于 $\mathfrak{g}_1$ 是单 Lie 代数, 故 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{k}$ 的不可约表示.

反之, 设 $\mathfrak{g}_1$ 是一个紧单 Lie 代数. 在 $\mathfrak{g} = \{(X, Y) | X, Y \in \mathfrak{g}_1\}$ 中定义运算: $(X_1, Y_1) + (X_2, Y_2) = (X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$, $k(X, Y) = (kX, kY)$, $[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2])$. 则 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, 且同构于 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$. $\mathfrak{g}$ 的变换 s: $s(X, Y) = (Y, X)$ 是对合自同构, 且有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$, $\mathfrak{k} = \{(X, X) | X \in \mathfrak{g}_1\}$, $\mathfrak{p} = \{(X, -X) | X \in \mathfrak{g}_1\}$. 此时, $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 同构, 可将其等同. $\mathfrak{p}$ 作为 $\mathfrak{k}$, 即 $\mathfrak{g}_1$ 的表示, 等价于 $\mathfrak{g}_1$ 的伴随表示, 因而是不可约的, 故 $(\mathfrak{g}, s)$ 为正交对称 Lie 代数. □

定理 6.9.4　*设 M 是单连通的半单型 Riemann 对称空间. 则 M 可分解为单连通的不可约 Riemann 对称空间的乘积.*

证　与定理 6.9.1 的证明类似, 读者可自行证明完成. □

6.10　对称空间的秩

本节讨论 Riemann 对称空间的秩的理论. 这个理论可用于讨论紧半单 Lie 代数的 Cartan 子代数的共轭性, 因而也可用于复半单 Lie 代数的 Cartan 子代数的共轭性的讨论. 本节要用到较多的微分几何的概念与结果. 所以只作简单介绍, 而省去证明.

定义 6.10.1　*设 S 是 Riemann 流形 M 的子流形, p 为 S 中的一点. 如果过 p 点与 S 相切的 M 的测地线也是 S 中的曲线, 则称 S 在 p 点是***测地的***. 若子流形 S 中每一点都是测地的, 则称 S 为 M 的***全测地子流形***. 如果全测地子流形的曲*

率张量为零则称为平坦的.

关于全测地子流形有下面结果:

1) S 是 M 的全测地子流形, 则 S 的测地线也是 M 的测地线.

2) Riemann 流形 M 的连通完备子流形 S 是全测地子流形当且仅当沿 S 中曲线的 M 的平行移动总将 S 的切向量移动到 S 的切向量, 即若 $\gamma \subseteq S$, 则

$$\|_\gamma(S_p) = S_q, \quad \forall p, q \in \gamma.$$

3) M 为单连通完备 Riemann 流形, 且曲率为负. S 为 M 的闭全测地子流形, $p \in S$. 则与 S 垂直于 p 的 M 的测地线构成 M 的一个子流形 $S^\perp(\mathfrak{p})$, 且

$$M = \bigcup_{p \in S} S^\perp(p).$$

$p \neq q$ 时, $S^\perp(p) \cap S^\perp(q) = \varnothing$.

4) S 为 Riemann 流形 M 的全测地子流形. 如果 M 是局部对称的, 则 S 也是局部对称的.

事实上, S 上的每个点的 (中心) 测地对称是 M 在该点的 (中心) 测地对称在 S 上的限制.

5) 设 S 是 M 的子流形. $X, Y \in \mathcal{D}(M)$, 使得 $p \in S$ 时有 $X_p, Y_p \in S_p$, $p \to X_p$, $p \to Y_p$ 为 $\mathcal{D}(S)$ 中元素. 记为 $\bar{X}$, $\bar{Y}$. $[X, Y]_p \in S_p$. 于是有

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}.$$

又若 M 有 Riemann 结构 g. $\bar{g}$ 为 g 在 S 上诱导的 Riemann 结构. ∇, $\bar{\nabla}$ 为对应 $g, \bar{g}$ 的 M, S 的 Riemann 联络. 又 $X, Y, Z \in \mathcal{D}(M)$, $\forall p \in S$ 均有 $X_p, Y_p, Z_p \in S_p$. 则有

$$g(X, \nabla_Z(Y))(p) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\bar{Y}))(p).$$

又设 S 为 M 的全测地子流形, 则有

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\bar{Y}) = \overline{\nabla_Z(Y)}.$$

又若 R, $\bar{R}$ 分别为 M, S 的曲率张量, 则

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = \overline{R(X, Y)Z},$$

而且对 S_p 上的一个二维子空间, 关于 M 与 S 的截曲率是一样的.

与全测地子流形密切相关的代数结构是所谓的李三系.

定义 6.10.2 域 F 上线性空间 T, 有一三元线性运算 $[\ ,\ ,\ ]$ (即 $V\times V\times V$ 到 V 的三重线性映射) 满足以下条件:

1) $[x,x,y]=0$;

2) $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$;

3) $[a,b,[x,y,z]]=[[a,b,x],y,z]+[x,[a,b,y],z]+[x,y,[a,b,z]]$;

则称 T 是一个李三系.

自然也可以定义并讨论李三系的子系、理想、商, 等等.

例 6.10.1 设 θ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构, $\mathfrak{g}$ 有相应分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}=E_1(\theta)$, $\mathfrak{p}=E_{-1}(\theta)$. 则 $\mathfrak{p}$ 对于三元运算 $[X,Y,Z]=[[X,Y],Z]$ $(\forall X,Y,Z\in\mathfrak{p})$ 成为李三系. $\mathfrak{p}$ 的子空间 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的子系, 当且仅当 $[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],\mathfrak{s}]\subseteq\mathfrak{s}$

定理 6.10.1 设 $M=I(M)/K$ 是 Riemann 对称空间. 又 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}I(M)$. $\mathfrak{g}$ 对应 Cartan 分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$. $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}K$, $\mathfrak{p}=M_o$ 为 $o=\{K\}$ 的切空间, S 是 M 的子流形, S 在 $o=\{K\}$ 处切空间为 $S_o=\mathfrak{s}\subseteq\mathfrak{p}$.

1) 若 S 为 M 的全测地子流形, 则 $[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],\mathfrak{s}]\subseteq\mathfrak{s}$, 即 $\mathfrak{s}$ 是李三系 $\mathfrak{p}$ 的子系;

2) 若 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的子系, 则其对应的 M 的子流形 $S=\mathrm{Exp}\mathfrak{s}$ 是 M 的全测地子流形.

证 1) 设 S 是 M 的全测地子流形. 又设 $X,Y\in\mathfrak{s}$, $t\in\mathbf{R}$, 于是

$$A=d\mathrm{Exp}_{tY}(X)$$

与 S 相切于 $\mathrm{Exp}(tY)=\exp tY\cdot o$. 又 $d\tau(\exp(-tY))A$ 与 A 沿 $\mathrm{Exp}tY$ 平行. 故由全测地子流形的结果 2) 知

$$d\tau(\exp(-tY))A\in\mathfrak{s}.$$

由定理 6.8.1 知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{tY}^n}{(2n+1)!}(X)\in\mathfrak{s},\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

于是

$$T_Y(X)=(\mathrm{ad}Y)^2(X)\in\mathfrak{s}.$$

设 $X,Y,Z\in\mathfrak{s}$, 而

$$T_{Y+Z}=T_Y+T_Z+\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}Z+\mathrm{ad}Z\mathrm{ad}Y,$$

由 $T_{Y+Z}(X)$, $T_Y(X)$, $T_Z(X)\in\mathfrak{s}$, 故有

$$[Y,[Z,X]]+[Z,[Y,X]]\in\mathfrak{s}.$$

但是

$$[Z,[Y,X]]=[[Z,Y],X]+[Y,[Z,X]],$$

故有

$$2[Y,[Z,X]]+[X,[Y,Z]]\in\mathfrak{s}.$$

交换 X, Y, 再以 2 乘上式, 则有

$$4[X,[Z,Y]]+2[Y,[X,Z]]\in\mathfrak{s},$$

将两式相加, 则有 $[X,[Y,Z]]\in\mathfrak{s}$, 即

$$[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],\mathfrak{s}]\subseteq\mathfrak{s}.$$

这就证明了 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的子系.

2) 若 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的子系, 则有

$$[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]]\subseteq[\mathfrak{s},[\mathfrak{s},[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]]]\subseteq[\mathfrak{s},\mathfrak{s}].$$

故 $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ 是 $\mathfrak{k}$ 的子代数. 于是 $\mathfrak{g}'=[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]\dot{+}\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 设 G' 是由 $\exp\mathfrak{g}'$ 生成的 $I(M)$ 的解析子群. 令 M' 为 G' 的通过 $o=\{K\}$ 的轨道. 即 $M'=G'\cdot o$. 令 $K'=\{g\in G'|g\cdot o=o\}$. 则 K' 是 G' 的闭子群, 又 M' 与 G'/K' 有一一对应, 故可将 G'/K' 的拓扑结构与微分结构转移到 M' 上, 且 M' 是 M 的子流形. 在 o 处 M' 的切空间 M'_o 同构于 $\mathfrak{s}$, 记 M'_o 为 $\mathfrak{s}$. 过 o 点的 M 的测地线为 $\exp tX\cdot o$, $X\in\mathfrak{p}$, $t\in\mathbf{R}$. 此测地线与 M' 相切于 o 当且仅当 $X\in\mathfrak{s}$. 故 M 的子流形 M' 在 o 点是测地的. 由于 G' 是 M 与 M' 的等距变换群, 且 G' 在 M' 上作用可递, 故知 M' 在每点都是测地的. 于是 M' 是 M 的全测地子流形, 而且有

$$M'=\mathrm{Exp}\,\mathfrak{s}.$$

这样, 我们完成了定理的证明. □

注 在证明 2) 时, 可以看到 G 的对合自同构 $\sigma(\sigma(g)=s_ogs_o, g\in G$, s_o 是 M 在 o 点的中心对称) 使 $\exp(s+[s,s])$ 生成的 G 的子群 G' 不变, K' 为 G' 在 o 处的迷向子群, 于是 (G',K') 也是一个 Riemann 对称对. 因而 $M'=\mathrm{Exp}\mathfrak{s}$ 也是 Riemann 对称空间.

利用上面定理与对称空间曲率张量, 可得到下面定理.

定理 6.10.2 $M=G/K$ 是紧型或非紧型的 Riemann 对称空间. 对应的李代数的 Cartan 分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$. $\mathfrak{s}$ 是李三系 $\mathfrak{p}$ 的子系, 则 M 的全测地子流形 $S=\mathrm{Exp}\,\mathfrak{s}$ 是平坦的(即曲率张量为零) 当且仅当 $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=0$.

证 由定理 6.8.1 的注知, $S=\mathrm{Exp}\,\mathfrak{s}$ 也是 Riemann 对称空间. S 中过 o 点的测地线为 $\exp tX\cdot o$, 这里 $X\in\mathfrak{s}$. 而由定理 6.8.3 知, $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{s}$ 有

$$R(X,Y)Z=-[[X,Y],Z].$$

又过 X, Y 的截曲率 $K(s)$ 为

$$K(s) = \sum \frac{1}{\beta_i} B([X_i, Y_i], [X_i, Y_i]),$$

这里 β_i, X_i, Y_i 如定理 6.8.3 中的证明所述. 于是 $K(s) = 0$ 当且仅当 $[X, Y] = 0$, 即 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = 0$. □

$\mathfrak{a}$ 为李三系 $\mathfrak{p}$ 的子系, 故 $\mathrm{Exp}\,\mathfrak{a}$ 是全测地子流形. 由 $\mathfrak{a}$ 是极大 Abel 的, 知下面推论成立.

推论　$M = G/K$ 为紧型或非紧型的 Riemann 对称空间. 对应的李代数分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$. 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 中极大的 Abel 子空间 ($[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$). 则 $\mathrm{Exp}\,\mathfrak{a}$ 是 M 的极大的平坦的全测地子流形.

从这里出发就可以得到下面命题.

引理 6.10.1　*设 $\mathfrak{g}$ 是实半单李代数. θ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ 为 $\mathfrak{p}$ 中两个极大 Abel 子空间. 则有*

1)　*存在 $H \in \mathfrak{a}$, 使得 $\mathfrak{a} = C_{\mathfrak{p}}(H)$;*

2)　$\mathfrak{p} = \bigcup\limits_{k \in K} k\mathfrak{a}$;

3)　*有 $k \in \exp \mathrm{ad}\mathfrak{k} = K$, 使得 $k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.*

证　为简单起见, 记 $\mathfrak{u} = \mathrm{ad}\mathfrak{u}$, 于是

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Int}\,\mathfrak{u} = \exp \mathrm{ad}\mathfrak{u} = \exp \mathfrak{u},\\
&K = \exp \mathrm{ad}\mathfrak{k} = \exp \mathfrak{k},\\
&P = \exp \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

1)　因为 $K = \exp \mathfrak{k}$, $P = \exp \mathfrak{p}$, 所以 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u} = PK$. 当 X 跑遍 $\mathfrak{p}$ 时, $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}/K$ 的测地线 $\mathrm{Exp}\,tX = \exp tX \cdot K$ 盖满了 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}/K$. 以 $\tilde{\theta}$ 表示对应于 θ 的 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}$ 的对合自同构, 则有

$$\tilde{\theta}((\exp X)k) = \exp(-X) \cdot k, \quad X \in \mathfrak{p},\ k \in K.$$

因此

$$\begin{aligned}
&((\exp X)k)\theta((\exp X)k)^{-1}\\
=&((\exp X)k)(k^{-1} \exp X)\\
=&\exp 2X, \qquad X \in \mathfrak{p},\ k \in K.
\end{aligned}$$

故知

$$P = \{g\tilde{\theta}g^{-1} | g \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{u}\}.$$

由此可知 P 在 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}$ 中是紧致闭的. 设 A 是 $\exp \mathfrak{a}$ 在 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{u}$ 中的闭包, 故 A 为环面, 且 $A \subseteq P$. 又 $\tilde{\theta}(a) = a^{-1}, \forall a \in A$, 故 $\mathrm{Lie} A \subseteq \mathfrak{p}$, 且 $\mathrm{Lie}\ A$ 是可换的, 于是 $\mathrm{Lie}\ A = \mathfrak{a}$. 取 $H \in \mathfrak{a}$ 使得 $\exp tH$ 在 A 中稠密, 则有

$$\mathfrak{a} = C_{\mathfrak{p}}(H).$$

2) 用 B 表示 $\mathfrak{u}$ 的 Killing 型. 取定 $X \in \mathfrak{p}$ 后, $B(H, k \cdot X)$ 是 K 上连续函数, 于是有极小值. 设 $k_o \in K$, 使得

$$B(H, k_o X) \leqslant B(H, kX), \quad \forall k \in K.$$

设 $T \in \mathfrak{k}$. 因而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(H, \exp tT \cdot k_o \cdot X)_{t=0} = 0,$$

即有

$$B(H, [T, k_o X]) = 0,$$

即

$$B([k_o X, H], T) = 0, \quad \forall T \in \mathfrak{k}.$$

而

$$[k_o X, H] \in \mathfrak{k},$$

B 在 $\mathfrak{k}$ 上是负定的, 故

$$[k_o X, H] = 0.$$

即有 $k_o X \in C_{\mathfrak{p}}(H) = \mathfrak{a}$. 因而

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} k\mathfrak{a}.$$

3) 设 $\mathfrak{a}'$ 也是极大 Abel 极大的. $\mathfrak{a} = C_{\mathfrak{p}}(H)$. 由 2) 知, 有 $k \in K$ 使得 $kH \in \mathfrak{a}'$. 即 $H \in k\mathfrak{a}'$. 因而 $[k^{-1}\mathfrak{a}', H] = 0$. 故 $k^{-1}\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$. $k^{-1}\mathfrak{a}'$ 也是极大 Abel 的. 故 $k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. □

此命题蕴涵了半单李代数的 Cartan 子代数的共轭性.

定理 6.10.3 设 M 为紧型或非紧型的 Riemann 对称空间. A, A' 均是 M 的极大平坦全测地子流形. 又 $p \in A$, $p \in A'$. 则有

1) A 与 A' 都是 M 的闭子流形;

2) 有 $g \in I_o(M)$, 使得 $g(p) = p', g(A) = A'$, 因而 A 与 A' 有相同的维数;

3) M_p, A_p 为 M, A 在 p 点的切空间. 对任一 $X \in M_p$, 有 $k \in I_o(M)$, 使得 $k(p) = p$, $dk(X) \in A_p$.

证 1) 以 K 表示 $I_o(M)$ 在 p 处的迷向子群. 又设 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie} I_o(M), \mathfrak{k} = \mathrm{Lie} K$. 则 $\mathfrak{g}$ 有分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}.$$

于是 $M_p = \mathfrak{p}, A_p = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, 且 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{p}$ 中极大 Abel 子空间. 令 $G' = \exp \mathfrak{a}, K' = \{g \in G' | g(p) = p\}$. 因为 $\mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ 是全测地子流形, 恰为轨道 $G' \cdot p$, 故 $G' \cdot p$ 上有由 G'/K' 诱导的微分结构. 设 σ 为由点 p 中心对称 s_p 诱导的 $I(M)$ 的对合自同构. 由于 $\mathfrak{p} = \{X | d\sigma(X) = -X\}$, 故 $\sigma(g) = g^{-1}, \forall g \in G'$. 因而

$$\sigma(g) = g^{-1}, \quad \forall g \in \bar{G}'.$$

$\bar{G}'$ 是 G' 的闭包. $\bar{G}'$ 也是可换群. 于是有

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Lie}\,\bar{G}' \subseteq \mathfrak{p}.$$

由 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 中极大可换的. 故 Lie $\bar{G}' = \mathfrak{a}$. 因而有 $\bar{G}' = G'$. 故 G' 是闭子群. K' 是 K 的闭子群, 故紧致. 因而 G'/K' 是 $G/K = M$ 中的闭子集. 又由 $\mathrm{id} : A \to M$ 是连续映射, 故可微. 从而 $\mathrm{Exp}A_p = A$ 为 M 的闭子流形.

2) 由于 $I_o(M)$ 在 M 上作用可递, 故有 $g_1 \in I_o(M)$ 使得 $g_1(p') = p$. 于是 $dg_1(A'_{p'}) \subseteq M_p = \mathfrak{p}$. 显然, $dg_1(A'_{p'})$ 是 $\mathfrak{p}$ 中极大 Abel 子空间. 由引理 6.10.1 知有 $k_1 \in K$, 使得 $dk_1(dg_1(A'_{p'})) = A_p$. 因而令 $g = k_1 g_1$, 则有 $g(p') = p$, $g(A') = A$. 故 A, A' 维数相等.

3) 这是引理 6.10.1 的直接结果. □

从此结论, 知下面定义是合理的.

定义 6.10.3 Riemann 对称空间 M 的极大平坦全测地子流形的维数叫做 M 的秩.

习　题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 是实半单 Lie 代数. θ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ 为 $\mathfrak{p}$ 中两个极大 Abel 子空间. 则有
   1) 存在 $H \in \mathfrak{a}$, 使得 $\mathfrak{a} = C_{\mathfrak{p}}(H)$;
   2) 有 $k \in \exp \mathrm{ad}\mathfrak{k} = K$, 使得 $k\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$;
   3) $\mathfrak{p} = \bigcup\limits_{k \in K} k\mathfrak{a}$.
2. 证明 $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ 的秩为 1.
3. 证明双曲空间 H_1^n 的秩为 1.
4. 复射影空间的秩为 1.
5. 设 G 为连通紧 Lie 群, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大 Abel 子代数. 则
   1) $\exists H \in \mathfrak{a}$. 使得 $C_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{a}$;
   2) 若 $\mathfrak{a}'$ 也是极大 Abel 子代数, 则有 $g \in G, \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$;
   3) $\mathfrak{g} = \bigcup\limits_{g \in G} \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{a})$.
6. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数. $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 则有
   1) $\exists H \in \mathfrak{h}$, 使得 $C_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{h}$;
   2) $\exists \sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 使得 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$;
   3) $X \in \mathfrak{g}$ 为正则元, $\exists \sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 使 $\sigma(X) \in \mathfrak{h}$.

7. 设 $\mathfrak{g}_o$ 为实半单 Lie 代数. θ 为 $\mathfrak{g}_o$ 的 Cartan 对合. $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o + \mathfrak{p}_o$ 为 Cartan 分解. 对应紧半单 Lie 代数 $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_o + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_o$, 相应的对合自同构也记为 θ. 又设 $(G, K_1), (U, K_2)$ 是对应于 $(\mathfrak{g}_o, \mathfrak{k}_o)$, $(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}_o)$ 的 Riemann 对称对. 又 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}_o$ 中极大 Abel 子空间, A_1, A_2 分别为 G, U 中以 $\mathfrak{a}, \sqrt{-1}\mathfrak{a}$ 为 Lie 代数的解析子群. 则有

$$G = K_1A_1K_1, \quad U = K_2A_2K_2.$$

6.11 Hermite 对称空间

Riemann 对称空间是 Euclid 空间与球面等几何对象的推广. 这些都是在实数域的基础上发展起来的. 很自然, 我们希望把这一结果扩展到复数域的情况. 这就是本章要讨论的 Hermite 对称空间. 首先介绍一些相应的几何概念与结果, 这些结果的证明都省去了. 读者可查阅相关文献.

设 M 是一个 C^∞ 流形. 一个 $(1,1)$ 型的张量场 J 若满足 $J(JX) = -X$, $\forall X \in \mathfrak{D}^1(M)$, 则称为 M 上的一个**概复结构**, 并称 (M, J) 为**概复流形**. (M, J) 的满足 $S(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$ 的 $(1,2)$ 型的张量场 S 称为概复结构的挠张量. S 有以下性质: $S(X,Y) = -S(Y,X)$; $S(fX, gY) = fgS(X,Y)$, 这里 $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, $f, g \in \mathcal{F}(M) = \mathfrak{D}^0(M)$. 若 S 满足 $S(X,Y) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, 则称 (M, J) 满足可积条件, 或者说 J 是可积的.

M 是 n 维复流形, $\{(U,\varphi)\}$ 是坐标邻域组. 于是有 $\varphi(p) = \begin{pmatrix} z_1(p) \\ z_2(p) \\ \vdots \\ z_n(p) \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, $z_i(p) = x_i(p) + \sqrt{-1}\, y_i(p), 1 \leqslant i \leqslant n,\ p \in U$.

设 $\psi(p) = \begin{pmatrix} x_1(p) \\ y_1(p) \\ x_2(p) \\ y_2(p) \\ \vdots \\ x_n(p) \\ y_n(p) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $p \in U$. 则 M 是以 $\{(U,\psi)\}$ 为坐标邻域组的 $2n$ 维实流形. 设 $p \in M$, M_p 是实解析流形 M 的切空间, 于是 M_p 中有基 $\left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)_p \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$. 作 $J \in \mathrm{End} M_p$ 如下: $J\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$, $J\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 即 $J^2 = -\mathrm{id}_{M_p}$. 从而得到了 M 的概复结构, 而

且是可积的. 称此为典型的概复结构. 反之, 一个概复流形 (M, J), 如果 J 可积, 则可以定义为复流形, J 恰为其典型的概复结构.

设 (M, J) 是连通的概复流形. 又 g 是 M 上的 Riemann 结构, ∇_X 是与 g 相对应的 Riemann 联络. 如果

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M), \tag{1}$$

则称 g 是 M 上的 **Hermite 结构**.

如果再加上条件

$$\nabla_X \cdot J = 0, \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(M), \tag{2}$$

则称 g 为 **Kähler 结构**.

设 M 是一个连通的复流形, 并有 Hermite 结构 (对 M 的典型概复结构), 这时我们称 M 是一个 **Hermite 流形**. 分别以 $H(M), I(M)$ 表示 M 的全纯变换群与等距变换群. M 的所有全纯等距变换构成一群, 以 $A(M)$ 表示, 即 $A(M) = H(M) \cap I(M)$.

定义 6.11.1　设是一个 Hermite 流形. 如果对 M 中每一点 p 有对合的全纯等距变换 s_p 以 p 为孤立不动点, 则称 M 是一个 **Hermite 对称空间**.

关于 Hermite 对称空间有下面结果是很基本的.

定理 6.11.1　设 M 是一个 Hermite 对称空间. 则 $A(M)$ 是 M 上的 Lie 变换群. 令 $G = A(M)_0$ 为 $A(M)$ 的单位连通分支. o 为 M 中一个定点. 令

$$K = \{k \in G | k \cdot o = o\}.$$

则 (G, K) 是 Riemann 对称对, 且对应的对合自同构为 $\sigma(g) = s_o g s_o$. G/K 与 M 同胚.

M 的 Hermite 结构一定是 Kähler 结构.

证　由 Hermite 对称空间的定义知 M 是一个 Riemann 对称空间. 因而 $I(M)$ 是 M 的 Lie 变换群. 因而 $h \in A(M) = I(M) \cap H(M)$ 当且仅当

$$(dh)_p \cdot J_p = J_{hp} \cdot (dh)_p, \quad \forall p \in M.$$

由此不难看出, $A(M)$ 是 $I(M)$ 的闭子群. 故 $A(M)$ 是 Lie 群. 又 $s_p \in A(M)$, 故 $A(M)$ 在 M 上的作用可递. 由此可知 $G = A(M)_0$ 在 M 上的作用是可递的. 设 $o \in M$. K 为 o 的迷向子群与 G 的交. 于是 (G, K) 是 Riemann 对称对. 相应的 G 的对合自同构 σ 为 $\sigma(g) = s_o g s_o$. G/K 与 M 同胚.

设 M_o 是 o 的切空间, $X \in M_o$. 于是 M 中有测地线

$$\begin{cases} \gamma_X(t), \\ \gamma_X(0) = 0, \\ \dot{\gamma}_X(0) = X. \end{cases}$$

又 $T_t = s_{\gamma(\frac{t}{2})}s_o$ 是 $I(M)$ 中单参数子群, 由 $s_{\gamma(\frac{t}{2})}s_o \in H(M)$, 因而 T_t 是 $A(M)$ 即 G 中单参数子群. 而 $(dT_t)_o$ 是沿 γ_X 的平行移动. T_t 保持复结构不变, 故 dT_t 也保持复结构不变. 即 $\nabla_X \cdot J = 0$. 故 M 的 Hermite 结构是 Kähler 结构. □

定理 6.11.2 设 (G, K) 是 Riemann 对称对. π 是 G 到 $G/K = M$ 的自然映射, 且 $\pi(e) = o$. 设 Q 是 M 上任一 G 不变 Riemann 度量. 又设 $A \in \mathrm{End}(M_o)$ 使得

1) $A^2 = -\mathrm{id}_{M_o}$;

2) $Q_o(AX, AY) = Q_o(X, Y), \forall X, Y \in M_o$;

3) A 与线性迷向群 K^* 中每个元素可换.

则 M 中有唯一的 G 不变概复结构 J, 使得 $J_o = A$, Q 是 Hermite 结构, J 可积, 且对于相应的复流形, M 是 Hermite 对称空间.

证 以 $\tau(h)$ 表示 $h \in G$ 在 G/K 上的作用. 由 A 与 K^* 的所有元素可换. 故有

$$d\tau(k)_o \cdot A = A \cdot d\tau(k)_o, \quad \forall k \in K.$$

设 $p = aK = \tau(a) \cdot o$. 在 M_p 上定义线性变换

$$J_p = d\tau(a)\, A\, d\tau(a)^{-1}.$$

显然, J_p 与 a 的选取无关. $J_p^2 = -\mathrm{id}_{M_P}$, 而且 $p \to J_p$ 是可微映射. 故 J 是 M 上的概复结构, 且 $J_o = A$. 又

$$(d\tau(a))_p \cdot J_p = J_{\tau(a)p} \cdot (d\tau(a))_p,$$

即 J 是 G 不变的.

由 Q, J 都是 G 不变的, 于是

$$\begin{aligned}
&Q_p(J_pX, J_pY)\\
=&Q_p(d\tau(a)\, A\, d\tau(a)^{-1}X, d\tau(a)\, A\, d\tau(a)^{-1}Y)\\
=&Q_o(A\, d\tau(a)^{-1}X,\ A\, d\tau(a)^{-1}Y)\\
=&Q_o(d\tau(a)^{-1}X,\ d\tau(a)^{-1}Y)\\
=&Q_p(X, Y).
\end{aligned}$$

因而 Q 是 Hermite 结构.

又由 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解, 因而有

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

故由复几何理论知 J 是可积的, 于是 G/K 是复流形.

最后, 我们证明任何一点 $p=\tau(a)\cdot o$ 的中心对称是全纯映射. 注意到 $s_p=\tau(a)s_o\tau(a^{-1})$, J 是 G 不变的, 因而只要证明 s_o 是全纯的, 则有

$$\begin{aligned} ds_p\cdot J &= d\tau(a)ds_o d\tau(a^{-1})\cdot J \\ &= d\tau(a)ds_o\cdot J\cdot d\tau(a^{-1}) \\ &= d\tau(a)Jds_o d\tau(a^{-1}) \\ &= J\cdot ds_p. \end{aligned}$$

故 s_p 是全纯的. 现证 s_o 是全纯的. 由于 $(ds_o)_o=-\mathrm{id}$, 因而

$$(ds_o)_oJ_o=J_o(ds_o)_o.$$

又设 σ 是对应于对称对的 G 的对合自同构. 故有 $s_o\cdot\pi=\pi\cdot\sigma$, 因而有

$$s_o\cdot\tau(a)=\tau(\sigma(a))\cdot s_o.$$

于是在 $p=\tau(a)\cdot o$ 处有

$$\begin{aligned} ds_o\cdot J_p &= ds_o d\tau(a)J_o d\tau(a^{-1}) \\ &= d\tau(\sigma(a))ds_oJ_od\tau(a^{-1}) \\ &= d\tau(\sigma(a))J_ods_od\tau(a^{-1}) \\ &= d\tau(\sigma(a))J_od\tau(\sigma(a^{-1}))ds_o \\ &= J_{\tau(\sigma(a))\cdot o}ds_o \\ &= J_{s_o\cdot p}ds_o. \end{aligned}$$

故 s_o 是全纯映射, G/K 是 Hermite 对称空间. □

引理 6.11.1　设 M 是 Hermite 对称空间. 则 $I_o(M)$ 半单当且仅当 $A_o(M)$ 半单, 此时 $A_o(M)=I_o(M)$.

证　如果 $A_o(M)$ 半单. $A_o(M)$ 在 M 上的作用可递, 于是 $A_o(M)=I_o(M)$. $I_o(M)$ 半单.

反之, 设 $I_o(M)$ 半单. $\mathrm{Lie}I_o(M)=\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dot{+}\mathfrak{p}$ 为 Cartan 分解. 这时 $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]=\mathfrak{k}$. 设 $X\in\mathfrak{p}$. 我们有 M 中测地线

$$\gamma_X(t)=\exp tX\cdot o.$$

以前曾证明 $\exp tX=s_{\gamma(\frac{t}{2})}s_{\gamma(0)}$. 由 $s_{\gamma(\frac{t}{2})}$, $s_o\in A(M)$, 故 $\exp tX\in A_o(M)$, 从而 $X\in\mathrm{Lie}A_o(M)$. 于是

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\dot{+}\mathfrak{p}\subseteq\mathrm{Lie}A_o(M)\subseteq\mathrm{Lie}I_o(M)=\mathfrak{g}.$$

因而 $\mathrm{Lie}A_o(M)=\mathfrak{g}$. 故 $A_o(M)=I_o(M)$. □

定义 6.11.2 M 是 Hermite 对称空间. 根据 $A_o(M) = I_o(M)$ 分别为半单的、紧半单的与非紧半单的, 则分别称 M 为**半单型、紧型与非紧型**.

定理 6.11.3 设 M 是单连通 Hermite 对称空间. 则 M 有积分解

$$M = M_0 \times M_- \times M_+,$$

这里 $M_0 = \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}$, M_- 与 M_+ 分别为紧型与非紧型的单连通的 Hermite 对称空间.

证 设 o 为 M 中的一点, $G = A_o(M)$, K 为 o 的迷向子群. 设 $(\tilde{G}, \varphi)$ 是 G 的通用覆盖群. 设 $\tilde{K}$ 为 $\varphi^{-1}(K)$ 的单位分支, 于是可定义 $\tilde{G}/\tilde{K}$ 到 G/K 上映射 ψ 使下图交换, 即

$$\psi \cdot \pi_1 = \pi_2 \cdot \varphi,$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \tilde{G}/\tilde{K} & \xrightarrow{\psi} & G/K \end{array}$$

其中 π_1, π_2 分别为 $\tilde{G}$ 到 $\tilde{G}/\tilde{K}$, G 到 G/K 的自然映射. 于是 $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ 是 G/K 的覆盖映射. 但 $M = G/K$ 是单连通的. 因而有 $M = \tilde{G}/\tilde{K}$. 于是

$$\operatorname{Lie} \tilde{G} = \operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}, \quad \operatorname{Lie} \tilde{K} = \operatorname{Lie} K = \mathfrak{k},$$

且有分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+,$$
$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{k}_+.$$

相应地, $\tilde{G}$ 与 $\tilde{K}$ 有分解

$$\tilde{G} = G_0 \times G_- \times G_+,$$
$$\tilde{K} = K_0 \times K_- \times K_+.$$

以及

$$M = \tilde{G}/\tilde{K} = M_0 \times M_- \times M_+,$$

$M_0 = G_0/K_0$, $M_- = G_-/K_-$, $M_+ = G+/K_+$ 分别是 Euclid 型、紧型、非紧型的单连通的 Riemann 对称空间. 设 s 为对应于 $(\tilde{G}, \tilde{K})$ 诱导出的 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构. 于是

$$\mathfrak{p} = E_{-1}(s, \mathfrak{g}) = \mathfrak{p}_0 \dot{+} \mathfrak{p}_- \dot{+} \mathfrak{p}_+,$$

$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_+$ 分别为 M, M_0, M_-, M_+ 的切空间. 以 J 与 Q 表示 M 上的概复结构与 Riemann 结构. 故 Q_o 是 $\mathfrak{p}$ 上双线性型. $J_o \in \operatorname{End}(\mathfrak{p})$. 设 $Y_0 \in \mathfrak{p}_0$, 于是

$$J_o Y_0 = X_0 + X_- + X_+,$$
$$X_0 \in \mathfrak{p}_0, \ X_- \in \mathfrak{p}_-, \ X_+ \in \mathfrak{p}_+.$$

又对 $k \in K_- \times K_+$, $Z_0 \in \mathfrak{p}_0$, 有

$$\mathrm{Ad}(k)Z_0 = Z_0, \quad \mathrm{Ad}(k) \cdot J_o = J_o \cdot \mathrm{Ad}(k).$$

故有

$$\mathrm{Ad}(k)(X_- + X_+) = X_- + X_+, \quad k \in K_- \times K_+.$$

又

$$\mathrm{Ad}(k_0)(X_- + X_+) = X_- + X_+, \quad k_0 \in K_0.$$

即有

$$[X_- + X_+, \ \mathfrak{k}] = 0.$$

因而 $X_- + X_+ \in \mathfrak{p}_0$, 从而 $X_- + X_+ = 0$, 即 $J_o Y_0 = X_0 \in \mathfrak{p}_0$. 故 $J_o \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$. 再由 J_o 保持 Q_o 不变, 于是 $J_o(\mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+) = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$. 同样的讨论可以证明 $J_o \mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_-$. $J_o \mathfrak{p}_+ = \mathfrak{p}_+$. 由此知 M_0, M_-, M_+ 都是 Hermite 对称空间, 且 $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+$ 分别是紧半单、非紧半单 Lie 代数. □

定理 6.11.4　设 M 是单连通 Hermite 对称空间. 则 M 有积分解

$$M = M_0 \times M_- \times M_+,$$

这里 $M_0 = \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}$, M_- 与 M_+ 分别为紧型与非紧型的单连通的 Hermite 对称空间.

证　设 $M = G/K$.

$$\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r,$$

而

$$\mathrm{Lie}\, K = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}.$$

于是作为 Riemann 对称空间有

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r,$$

其中 M_i 是单连通的不可约的 Riemann 对称空间. 设 $M_i = G_i/K_i$, 则

$$\mathrm{Lie}\, G_i = \mathfrak{g}_i, \quad \mathrm{Lie}\, K_i = \mathfrak{k}_i, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i.$$

由 $J_o \in C(\mathfrak{k}^*)$, $J_o^2 = -\mathrm{id}$, 于是

$$J_o = J_1 + J_2 + \cdots + J_r,$$

$J_i \in \mathrm{End}((G_i/K_i)_o)$, 且有 $J_i \in C(\mathfrak{k}_i^*)$. 又 K_i 连通, J_i 与 $\mathrm{Ad}(K_i)$ 交换. 因而 M_i 是 Hermite 对称空间. □

定理 6.11.5 设 M 是半单型 Hermite 对称空间. $o \in M$. K 是 $A_o(M)$ 中 o 的迷向子群. 对应的线性迷向群为 K^*, $\mathrm{Lie}K^* = \mathfrak{k}^*$. 则

1) M_o 的复结构 $J_o \in C(K^*)$;

2) o 的中心对称 $s_o \in C_0(K)$, 即 s_o 属于 K 的中心的单位分支.

证 设 Q, R 分别为 M 的 Riemann 结构与曲率张量. 由引理 6.9.1 知 $\mathfrak{k}^*$ 中元素可扩充为 M_o 上张量代数的导子, 且此导子与收缩运算可交换, 并作用于 Q_o 与 R_o 为零. 又 $X, Y \in M_o$, $R_o(X,Y) \in \mathfrak{k}^*$. 于是有

$$\begin{aligned}(J_o \cdot Q_o)(X,Y) &= -Q_o(X, J_oY) - Q_o(J_oX, Y)\\ &= Q_o(J_o^2X, J_oY) - Q_o(J_oX, Y)\\ &= Q_o(J_oX, Y) - Q_o(J_oX, Y) = 0;\\ (J_o \cdot R_o)(X,Y) &= [J_o, R_o(X,Y)] - R_o(J_oX, Y) - R_o(X, J_oY).\end{aligned}$$

由 $R_o(X,Y) \in \mathfrak{k}^*$, 故 $[J_o, R_o(X,Y)] = 0$. 再由引理 6.2.2 知

$$R_o(X - \sqrt{-1}J_oX,\ Y - \sqrt{-1}J_oY) = 0.$$

即

$$R_o(X,Y) - R_o(J_oX, J_oY) - \sqrt{-1}(R_o(X, J_oY) + R_o(J_oX, Y)) = 0.$$

于是

$$(J_o \cdot R_o)(X,Y) = 0.$$

由引理 6.9.2 知 $J_o \in \mathfrak{k}^*$, 故 $J_o \in C(\mathfrak{k}^*)$.

现将 $\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{k}^*$ 等同起来, 则有

$$\exp(tJ_o) \in C(K).$$

在 $M_o(=\mathfrak{p})$ 上, 有

$$e^{\pi J_o} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} J_o^n = -\mathrm{id}.$$

故 $\exp(\pi J_o) = s_o$. □

定理 6.11.6 设 M 是半单型的单连通的 Hermite 对称空间. 则 M 有分解

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r,$$

其中 M_i 是单连通不可约的 Hermite 对称空间.

证 设 $M = G/K$. 则

$$\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r,$$

而

$$\operatorname{Lie} K = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}.$$

于是作为 Riemann 对称空间有

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r,$$

其中 M_i 是单连通的不可约的 Riemann 对称空间. 设 $M_i = G_i/K_i$, 则

$$\operatorname{Lie} G_i = \mathfrak{g}_i, \quad \operatorname{Lie} K_i = \mathfrak{k}_i, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i.$$

由 $J_o \in C(\mathfrak{k}^*)$, $J_o^2 = -\mathrm{id}$, 于是

$$J_o = J_1 + J_2 + \cdots + J_r,$$

$J_i \in \operatorname{End}((G_i/K_i)_o)$, 且有 $J_i \in C(\mathfrak{k}_i^*)$. 又 K_i 连通. J_i 与 $\operatorname{Ad}(K_i)$ 交换. 因而 M_i 是 Hermite 对称空间. □

这些结果说明 Hermite 对称空间的分类问题归结为不可约 Hermite 对称空间的分类.

表 6.1 不可约 Hermite 对称空间的分类

型	紧	非紧	空间复维数	$\dim \mathfrak{g}$
$\mathrm{I}_{p,q}$ $p \geqslant q \geqslant 1$	$SU(p+q)/$ $S(U(p)\times U(q))$	$SU(p,q,\mathbf{C})/$ $S(U(p)\times U(q))$	pq	$(p+q)^2-1$
II_n $n\geqslant 2$	$SO(2n)/U(n)$	$SO(n,\mathbf{H})/U(n)$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	$n(2n-1)$
III_n $n \geqslant 1$	$SP(n)/U(n)$	$SP(n,\mathbf{R})/U(n)$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	$n(2n+1)$
IV_n $n \neq 2$	$SO(n+2)/$ $SO(n)\times SO(2)$	$SO(2,n,\mathbf{R})/$ $SO(n)\times SO(2)$	n	$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
V	$E_6/$ $Spin(10)\cdot SO(2)$	$E_6^R/$ $Spin(10)\cdot SO(2)$	16	78
VI	$E_7/E_6\cdot SO(2)$	$E_7^R/E_6\cdot SO(2)$	27	133

注 1 表中 $\mathbf{H}$ 为四元素体.

注 2 表中 $Spin(10)$ 为 10 维旋量群, 它是 $SO(10)$ 的通用覆盖群, 这是紧单连通李群.

注 3 表中 E_6, E_7 分别为李代数为 E_6, E_7 的紧 Lie 群, E_6^R, E_7^R 分别为李代数为 E_6, E_7 的非紧实李群.

注 4 $\mathrm{I}_{1,1}$, II_2, III_1 与 IV_1 全纯同构; II_3 与 $\mathrm{I}_{3,1}$ 全纯同构; IV_3 与 III_2 全纯同构; IV_4 与 $\mathrm{I}_{2,2}$ 全纯同构; IV_6 与 II_4 全纯同构.

表 6.2 不可约 Hermite 对称空间对应的 Lie 代数分类

$\mathfrak{g}$	α_{i_0}	m_{i_0}	$\mathfrak{k}$ 的素根系	$\mathfrak{k}$	$(\mathrm{ad}, \mathfrak{p})$
A_l	$\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant l$	1	$\Pi_{A_{i-1}} \cup \Pi_{A_{l-i}}$	$T \times A_{i-1} \times A_{l-i}$	$T \times \gamma_1(A_{i-1}) \times \gamma_1(A_{l-i})$
B_l	α_1	1	$\Pi_{B_{l-1}}$	$T \times B_{l-1}$	$T \times \gamma_1(B_{l-1})$
C_l	α_l	1	$\Pi_{A_{l-1}}$	$T \times A_{l-1}$	$T \times \gamma_1^2(A_{l-1})$
D_l	α_1	1	$\Pi_{D_{l-1}}$	$T \times D_{l-1}$	$T \times \gamma_1(D_{l-1})$
D_l	$\alpha_{l-1}\,(\alpha_l)$	1	$\Pi_{A_{l-1}}$	$T \times A_{l-1}$	$T \times \gamma_2(A_{l-1})$
E_6	$\alpha_1\,(\alpha_5)$	1	Π_{D_5}	$T \times D_5$	$T \times \gamma_1(D_5)$
E_7	α_1	1	Π_{E_6}	$T \times E_6$	$T \times \gamma_1(E_6)$

许以超教授在文献 [16] 中给出了例外李群 E_7 对应的 Hermite 对称空间 V、VI 的实现, 这是当年 É Cartan 未曾解决的问题.

推论 设 U 是紧半单 Lie 群, 则 U 是 Riemann 对称空间, 但 U 不是 Hermite 对称空间.

参 考 文 献

[1] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.
[2] 孟道骥. 复半单李代数引论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1998.
[3] 孟道骥. 高等代数与解析几何 (上, 下)[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
[4] 孟道骥, 白承铭. 李群 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
[5] 孟道骥, 史毅茜. Riemann 对称空间 [M]. 天津: 南开大学出版社, 2005.
[6] 孟道骥, 朱萍. 有限群表示论 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[7] 孟道骥, 陈良云, 史毅茜, 白瑞蒲. 抽象代数 I -代数学基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
[8] 孟道骥, 王立云, 史毅茜, 徐丽媛. 抽象代数 II -结合代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
[9] 孟道骥, 王立云, 袁腊梅. 抽象代数III-交换代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
[10] 万哲先. 李代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1964.
[11] 项武义, 侯自新, 孟道骥. 李群讲义 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[12] 严志达. 李群和微分几何 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1960.
[13] 严志达. 半单纯李群李代数表示论 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1962.
[14] 严志达. 实半单李代数 [M]. 天津: 南开大学出版社, 1998.
[15] 严志达, 许以超. Lie 群及其 Lie 代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.
[16] 许以超. 李群和 Hermite 对称空间 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[17] Adams J F. Lectures on Exceptional Lie Grous[M]. Chicago: The University of Chicago Prss, 1996.
[18] Dickson L E. Linear Algebras[M]. London: Cambridge University Press, 1914.
[19] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces[M]. New York: Academic Press, 1978.
[20] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory[M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1972.
[21] Jacobson N. Lie Algebras[M]. New York, London: John Wiley, 1962.
[22] Jacobson N. Structure and Representation of Jordan Algebras[M]. Providence: Amer. Math. Soc.. 1968.
[23] Myers S B, Steenrod N E. The group of isometries of a Riemannian manifold[J]. Ann. of Math, 1939(40): 400-416.

索　引

B

半单李代数　9
半单型 Hermite 对称空间　217
半单型 Riemann 对称空间　201
伴随表示　5
表示的核　5
表示的维数　5
表示的张量积　44
表示的直和　42
表示函数　122
表示空间　42
不变内积　68
不变子空间　42
不可约表示　42
不可约 Riemann 对称空间　205

C

测地对称　159
测地线　17
乘法函数　19
重数　115

D

代数群　36
单参数子群　28
单李代数　9
导代数序列　6
导子　49
导子代数　49
等价表示　43
等价覆盖群　46
第二类标准坐标系　32
第三类标准坐标系　32
第一类标准坐标系　32
第二类不可约实表示　133
第一类不可约实表示　133
典型单李代数　89
典型李群　38
定向 Grassmann 流形　198
对称对　166
对称函数　128
对称空间　156
对称中心　156
对合自同构　55
对角子群　55
对偶表示　120

F

反对称函数　128
仿射变换　18
仿射局部对称空间　159
仿射联络　15
非紧型有效正交对称李代数　189
非紧型 Hermite 对称空间　217
非紧型 Riemann 对称空间　189
非正则元　84
负根　84
负根系　84
负向量　84
复化　74

复李群 19
复结构 184
复射影空间 158
辅助函数 19
覆盖重数 45
覆盖群 45

G

概复结构 213
概复流形 213
高度 85, 117
根 78
根链 81
根系 78
共轭 74
光滑映射 16
轨道 51

J

基本表示 119
基本强整向量 119
奇型表示 117
降中心序列 6
变换李代数 1
解析函数 12
解析流形 12
解析同态 28
解析子群 35
结构常数 2
结构映射 61
紧李代数 69
紧李群 64
紧型有效正交对称李代数 189
紧型 Hermite 对称空间 217
紧型 Riemann 对称空间 189
紧致嵌入子代数 170
局部截面 54
局部李群 21
局部同构 42
局部同态 42
局部群 21

K

可递作用 51
可解李代数 6
可微映射 16
可约表示 42

L

类函数 123
李变换群 51
李代数 1
李代数的伴随表示 50
李群 19
李群的伴随表示 50
李群的同构 39
李群的同态 39
李三系 208
李子群 34
例外单李代数 89
理想 2
联络系数 16
链 81

M

幂零李代数 6
迷向表示 201
迷向子群 51

N

挠率张量 16

内导子 49
内导子代数 49
内自同构 48
内自同构群 48

O

偶型表示 117

Q

齐性空间 51
强整向量 114
曲率张量 16
曲线 17
全测地子流形 206
权 115
权系 115
权向量 115
权子空间 115

S

商表示 42
商代数 2
实李群 19
实射影空间 174
实形式 74
双曲空间 157
素根 84
素根系 84

T

特殊线性李代数 4
特殊线性群 37
特殊酉李代数 4
特殊酉群 38
特殊酉星李代数 4
特殊酉星群 38
特殊正交群 37
特殊正交星李代数 4
特殊正交星群 38
特殊 (p,q) 型酉李代数 4
特殊 (p,q) 型酉群 38
特征 (标) 122
特征公式 131
体积 65
同构 3
同态 3
同态基本定理 56
通用覆盖群 46
拓扑群 21

W

完全可约表示 42
微分同胚 16
伪代数群 36
维数 19
维数公式 131
无穷小变换 52

X

线性李代数 4
线性表示 5
线性迷向群 201
向量场 13
协变微分 16
辛李代数 4
辛群 37
旋量群 61

Y

幺模群 67

一次微分形式 15
一般线性李代数 1
有效正交对称李代数 170
有效正交对称李代数的同构 189
有效正交对称李代数的自同构 190
有效作用 51
诱导拓扑 53
酉李代数 4
酉群 38
酉星李代数 4
酉星群 38
余切向量场 15
约化李代数 69
约化连通李群 69

Z

张量积 114
指数映射 29
正规化子 77
正规李子群 34
正交对称李代数 170
正交对称李代数的对偶 194
正交李代数 4
正交群 37
正根 84
正根系 84
正向量 84
正则元 84
正则李子群 34
整向量 114
秩 8
直和 42
中心 5
中心对称 156
子表示 42
子代数 2
自同构群 48
最高权 116
作用 51
左不变仿射联络 26
左不变向量场 23
左不变一次微分形式 25

其 他

Abel 李代数 1
C^∞ 函数 13
C^∞ 流形 12
Cartan 矩阵 86
Cartan 对合 180
Cartan 分解 180
Cartan 子代数 8
Cartan 子群 92
Clifford 代数 59
Dynkin 图 87
Engel 定理 7
Euclid 型 Riemann 对称空间 180
Euclid 型有效正交对称李代数 180
Kähler 结构 214
Grassmann 流形 198
Heisenberg 代数 38
Heisenberg 群 38
Hermite 对称空间 214
Hermite 结构 214
Hermite 流形 214
Hopf 映射 157
Jacobi 恒等式 1
Killing 型 5
Kronecker 积 114
Lie 代数 1
Lie 定理 8
Lie 的第二基本定理 24
Lie 的第三基本定理 24
Lie 的第一基本定理 24
Lorentz 度量 156

Lorentz 李代数　4
Lorentz 群　37
Maurer-Cartan 形式　25
Poincaré 群　45
Peter-Weyl 定理　123
(p,q) 型辛李代数　4
(p,q) 型辛群　38
(p,q) 型 Lorentz 群　37
(p,q) 型酉李代数　4
(p,q) 型酉群　38
(p,q) 型张量　15
Riemann 对称对　166
Riemann 对称空间　156
Riemann 对称空间的秩　212
$so(2n+1,\mathbf{C})$ 的旋表示　141
$so(2n,\mathbf{C})$ 的旋表示　142
Taylor 公式　33
Weyl 定理　68
Weyl 房　91
Weyl 基　80
Weyl 群　101

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华 陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以辇 陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯 召 魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982. 8 胡世华 陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯 召 魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青　段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜　陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉　冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙　吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇　张学莲　著
41　线性偏微分算子引论（下册）　1992.1　齐民友　许超江　编著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲　马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英　李　冲　杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先　霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐　云　著
56　Gel’fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引（下册）　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
78 同调论—— 代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪守宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132 图的可嵌入性理论(第二版) 2010.3 刘彦佩 著
133 非线性波动方程的现代方法(第二版) 2010.4 苗长兴 著
134 算子代数与非交换 L_p 空间引论 2010.5 许全华 吐尔德别克 陈泽乾 著
135 非线性椭圆型方程 2010.7 王明新 著
136 流形拓扑学 2010.8 马 天 著
137 局部域上的调和分析与分形分析及其应用 2011.6 苏维宜 著
138 Zakharov 方程及其孤立波解 2011.6 郭柏灵 甘在会 张景军 著
139 反应扩散方程引论(第二版) 2011.9 叶其孝 李正元 王明新 吴雅萍 著
140 代数模型论引论 2011.10 史念东 著
141 拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法 2011.12 周作领 尹建东 许绍元 著
142 Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用 2012.3 苗长兴 吴家宏 章志飞 著
143 有约束条件的统计推断及其应用 2012.3 王金德 著
144 混沌、Mel′nikov 方法及新发展 2012.6 李继彬 陈凤娟 著
145 现代统计模型 2012.6 薛留根 著
146 金融数学引论 2012.7 严加安 著
147 零过多数据的统计分析及其应用 2013.1 解锋昌 韦博成 林金官 编著
148 分形分析引论 2013.6 胡家信 著
149 索伯列夫空间导论 2013.8 陈国旺 编著
150 广义估计方程估计方法 2013.8 周 勇 著
151 统计质量控制图理论与方法 2013.8 王兆军 邹长亮 李忠华 著
152 有限群初步 2014.1 徐明曜 著
153 拓扑群引论(第二版) 2014.3 黎景辉 冯绪宁 著
154 现代非参数统计 2015.1 薛留根 著
155 三角范畴与导出范畴 2015.5 章 璞 著
156 线性算子的谱分析(第二版) 2015.6 孙 炯 王 忠 王万义 编著
157 双周期弹性断裂理论 2015.6 李 星 路见可 著
158 电磁流体动力学方程与奇异摄动理论 2015.8 王 术 冯跃红 著
159 算法数论(第二版) 2015.9 裴定一 祝跃飞 编著
160 偏微分方程现代理论引论 2016.1 崔尚斌 著
161 有限集上的映射与动态过程——矩阵半张量积方法 2015.11 程代展 齐洪胜 贺风华 著
162 现代测量误差模型 2016.3 李高荣 张 君 冯三营 著
163 偏微分方程引论 2016. 3 韩丕功 刘朝霞 著
164 半导体偏微分方程引论 2016.4 张凯军 胡海丰 著
165 散乱数据拟合的模型、方法和理论(第二版) 2016.6 吴宗敏 著

166　交换代数与同调代数(第二版)　2016.12　李克正　著

167　Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论　2017.3　钱　涛　李澎涛　著

168　有限 p 群构造(上册)　2017.5　张勤海　安立坚　著

169　有限 p 群构造(下册)　2017.5　张勤海　安立坚　著

170　自然边界积分方法及其应用　2017.6　余德浩　著

171　非线性高阶发展方程　2017.6　陈国旺　陈翔英　著

172　数理逻辑导引　2017.9　冯　琦　编著

173　简明李群　2017.12　孟道骥　史毅茜　著